

1. Введение

В процессе разработки и испытаний радиоэлектронной аппаратуры часто возникают задачи по оценке качества функционирования проектируемых систем и устройств. К сожалению, лишь немногие из этих задач могут быть решены точными аналитическими методами. Однако даже в случае удачи разработчик не может быть уверен в высоком качестве полученных технических решений. Причиной этого является то, что аналитические методы оценки дают достоверные результаты лишь при точном соответствии реальных условий функционирования разрабатываемой аппаратуры и математической модели этих условий. Это соответствие является скорее исключением, чем правилом, когда речь идет о радиотехнических системах, работающих в условиях высокой априорной неопределенности относительно статистики входных радиосигналов и помех, условий их распространения.

Безусловно, проведение натурных испытаний проектируемой аппаратуры позволяет адекватно оценить ее качество. Однако на этапе разработки и отладки вряд ли возможно говорить о качественном натурном эксперименте, поскольку его цена высока и реализация широкомасштабных экспериментальных исследований экономически не выгодна. В этих условиях единственным выходом для разработчика является проведение математического эксперимента. Такой эксперимент является не только экономически выгодным способом проверить качество функционирования радиоэлектронной аппаратуры на этапе ее проектирования и отладки. Проведение математического моделирования целесообразно еще и потому, что позволяет облегчить синтез и анализ алгоритмов обработки сигналов, реализация которых предполагает использование цифровых вычислительных устройств.

В основе проведения любого математического эксперимента лежит создание математической модели разрабатываемого или тестируемого устройства. При этом под *математической моделью* понимается формальное описание объекта или явления при помощи математических уравнений, которые могут быть представлены в замкнутой (решенной) или незамкнутой (нерешенной) форме. Соответственно *математическое моделирование* – это исследование объекта или явления на основе использования математической модели.

Исторически первым видом математического моделирования явилось моделирование аналитическое, в ходе которого разработчик производил расчет характеристик объекта по готовым формулам. Возможности данного метода, как уже было сказано выше, весьма ограничены, т.к. аналитические расчеты возможны лишь при простых по своей природе объектах. В настоящее время для исследования используется имитационное моделирование, при котором с максимальной степенью адекватности воспроизводится временная и логическая связь происходящих в объекте моделирования процессов.

В нашем случае объектом моделирования является *радиотехническая система (РТС)*. РТС – это совокупность технических средств обработки ра-

диосигналов, предназначенная для передачи информации и ее извлечения. Именно использование радиосигналов как носителей информации позволяет выделить радиосистемы из общего количества информационных систем в отдельную категорию. Информационная сущность РТС позволяет выделить следующие типы:

- РТС передачи информации (системы связи);
- РТС извлечения информации (радиолокационные системы, радионавигационные системы, системы радиоразведки);
- РТС разрушения информации (системы радиопротиводействия).

Любая РТС может быть укрупнено представлена в виде структурной схемы на рис. 1.1.

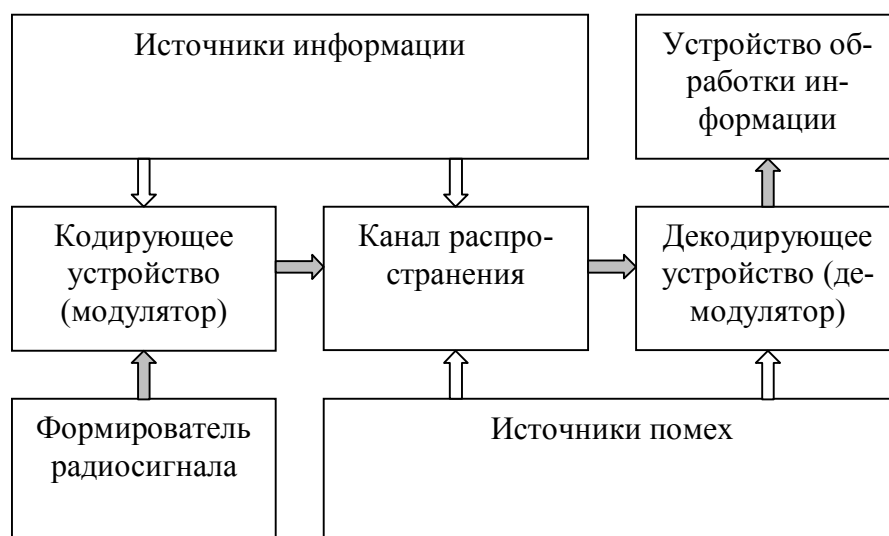


Рис. 1.1

Здесь формирователь сигнала генерирует радиосигнал, который поступает на кодирующее устройство (модулятор), функцией которого является наполнение сигнала информационным содержанием путем изменения его параметров (амплитуды, фазы, частоты, поляризации). Модулирующий сигнал на кодирующее устройство поступает от источника информации. Данный способ информационного наполнения наиболее характерен для связных РТС. Однако возможен и другой способ. Информационное содержание радиосигнал приобретает в канале распространения вследствие воздействия на его параметры физических свойств среды. Такой способ характерен для радиолокационных и автономных радионавигационных систем. В канале распространения сигнал подвергается воздействию помех. Это воздействие может происходить различно. Выделяют аддитивные и мультипликативные помехи. Воздействие последних приводит к таким изменениям радиосигнала, которые, в отличие от аддитивных помех, нельзя представить в виде простой су-

перпозиции сигнала и помехи. Однако помехи, действующие в канале распространения, не являются единственным источником негативного влияния на информационное содержание сигнала. Источником помех являются также внутренние шумы декодирующего устройства, задачей которого является демодуляция принимаемого сигнала. Демодулированный сигнал затем поступает на устройство обработки, где осуществляется извлечение необходимой информации.

Анализ приведенной схемы свидетельствует о том, что РТС имеют следующие особенности, которые необходимо учитывать при формировании их математических моделей:

- РТС – многомерные системы с большим количеством элементов и сложными функциональными связями между ними;
- РТС постоянно находятся под воздействием случайных факторов;
- РТС – быстродействующие системы, в которых сочетается высокая скорость изменения радиосигналов и относительно низкая скорость информационных потоков.

Перечисленные особенности делают задачу моделирования РТС чрезвычайно сложной. Ее решение с достаточной степенью адекватности возможно лишь при использовании современных цифровых ЭВМ и применении специальных математических методов, уменьшающих вычислительные затраты.

Целью настоящего учебного пособия является изложение наиболее употребимых для математического моделирования РТС алгоритмов, программная реализация которых ориентированна на использование цифровых универсальных ЭВМ.

2. Математическое моделирование радиосигналов и помех

2.1. Моделирование непрерывных детерминированных сигналов.

Использование ЦЭВМ в качестве основного инструмента математического моделирования приводит к необходимости реализации моделей сигналов и помех в дискретном времени. Поэтому задачу моделирования непрерывных детерминированных сигналов сформулируем как задачу отыскания алгоритмов, позволяющих формировать на ЭВМ их дискретные реализации без потери информации об исходном сигнале. Здесь слова «без потери информации» означают, что модель сохраняет все свойства непрерывного сигнала, и этот сигнал может быть однозначно восстановлен по своей модели.

Пусть требуется смоделировать детерминированный (неслучайный) радиосигнал

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0], \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

где $a(t)$ - закон амплитудной модуляции, $\varphi(t)$ - закон фазовой модуляции, $\omega_0 = 2\pi f_0$ - круговая несущая частота, φ_0 - начальная фаза. Форма представления сигнала (2.1) называется *временной*. Альтернативной ей является *частотная* форма

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.2)$$

где $S(\omega)$ - *спектральная функция* сигнала. Между функциями $s(t)$ и $S(\omega)$ существует взаимнооднозначное соответствие

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} dt, \quad (2.3)$$

Равенства (2.2) и (2.3) составляют пару (прямое и обратное) преобразований Фурье. Оба представления сигнала в силу взаимной однозначности полностью эквивалентны. Выбор между ними осуществляется, исходя из специфики конкретной задачи. На рис. 2.1 в качестве примера приведены временная и частотная формы представления радиоимпульса с трапецевидной спектральной функцией.

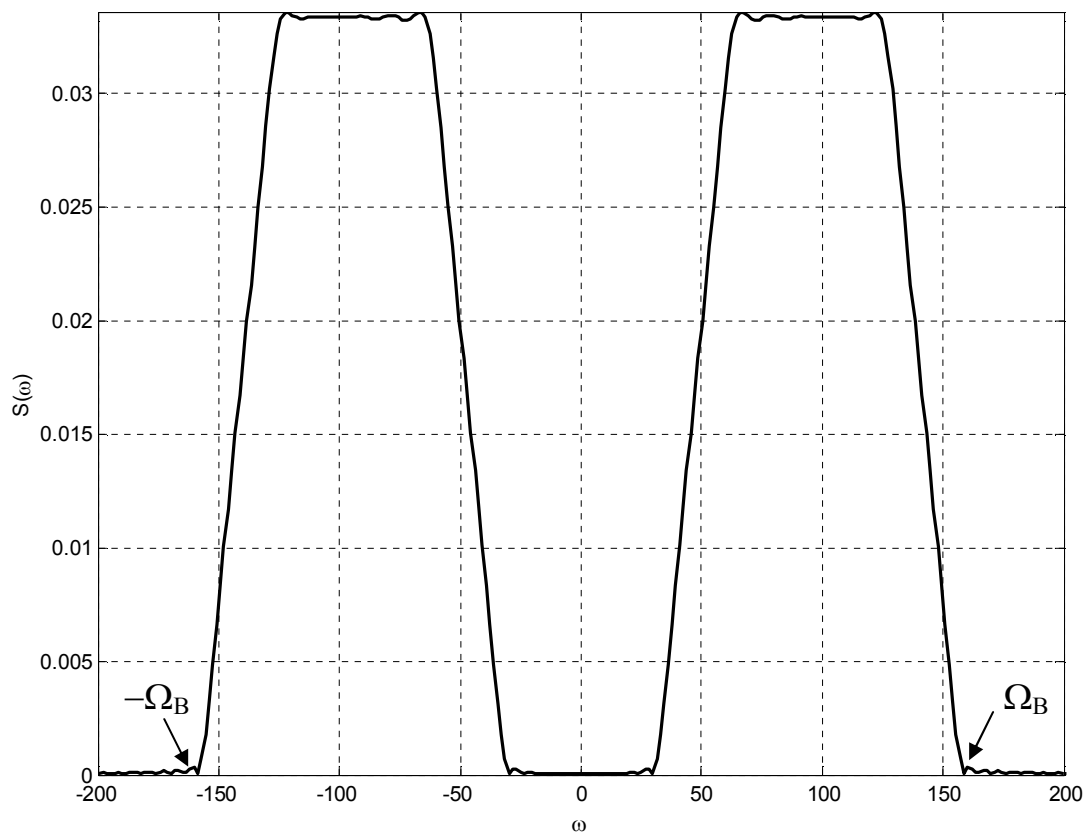
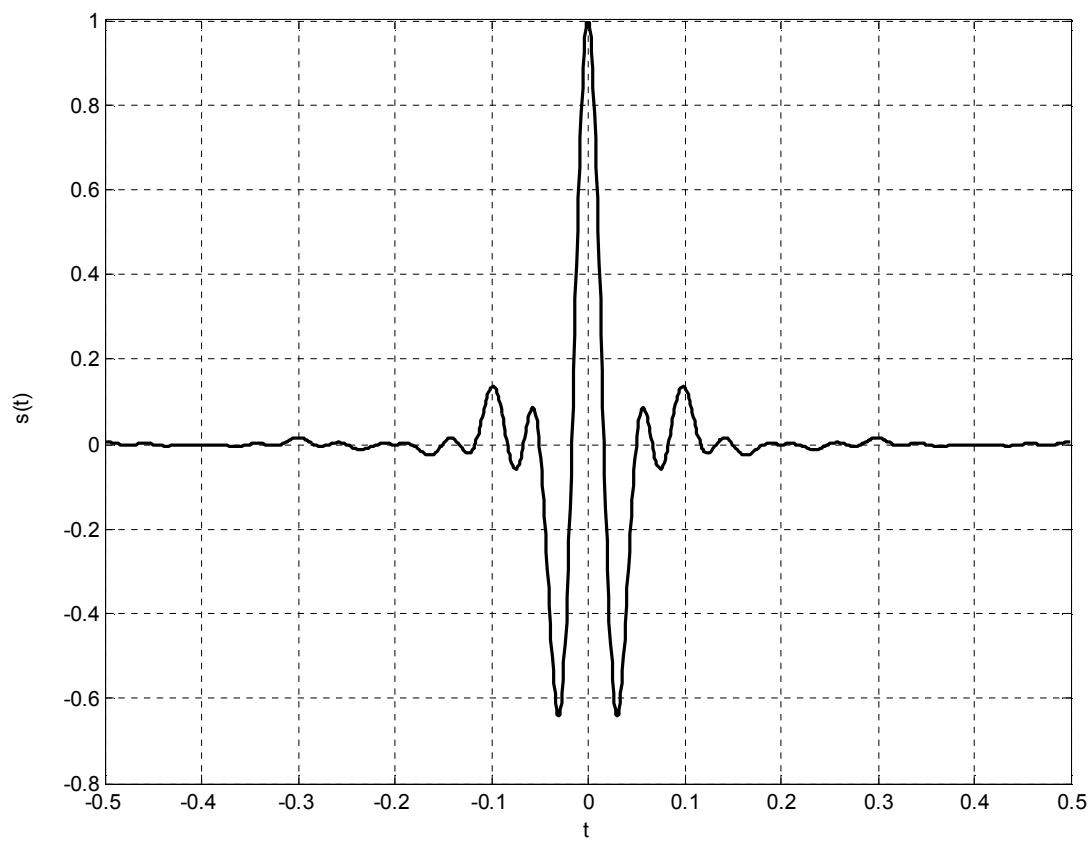


Рис. 2.1

Цифровой (дискретной) моделью сигнала $s(t)$ можно считать совокупность отсчетов, взятых с некоторым интервалом T

$$s[n] = s(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Интервал T называется *периодом дискретизации (ПД)*. При этом на некотором интервале наблюдения $[0, T_n]$ сигнал будет представляться в виде вектора конечной длины $\mathbf{s} = (s[0], \dots, s[N-1])^T$, где $(\cdot)^T$ - оператор транспонирования; $N = [T_n/T] + 1$ - длина вектора. Увеличивая ПД T , можно уменьшить длину N . Однако увеличивать T сверх некоторого предела нельзя, т.к. при этом будет утрачена возможность восстановления непрерывного сигнала $s(t)$ по вектору отсчетов \mathbf{s} . Действительно, согласно теореме Котельникова сигнал с ограниченным на интервале $[-\Omega_B, \Omega_B]$ спектром может быть представлен в виде следующего ряда

$$s(t) = \frac{\Omega_B T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \frac{\sin[\Omega_B(t - nT)]}{[\Omega_B(t - nT)]} \quad (2.5)$$

Зная отсчеты сигнала $s(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, на основе (2.5) можно восстановить значение сигнала в произвольный момент времени, если ПД удовлетворяет критерию Найквиста-Котельникова

$$T \leq \frac{1}{2F_B} \quad (2.6)$$

где $F_B = \Omega_B/2\pi$ - верхняя частота спектра сигнала. При нарушении критерия (2.6) восстановление сигнала по его дискретным отсчетам становится невозможным. Причиной этому является *эффект наложения*. Дело в том, что спектральная функция последовательности отсчетов сигнала $s(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ может быть записана в виде

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) \quad (2.7)$$

и является периодической функцией с периодом $\Omega = 2\pi/T$.

На рис. 2.2 представлен дискретизированный во времени радиоимпульс с трапецевидной спектральной функцией (см. рис. 2.1) и его спектр при $\Omega_B > \Omega - \Omega_B$.

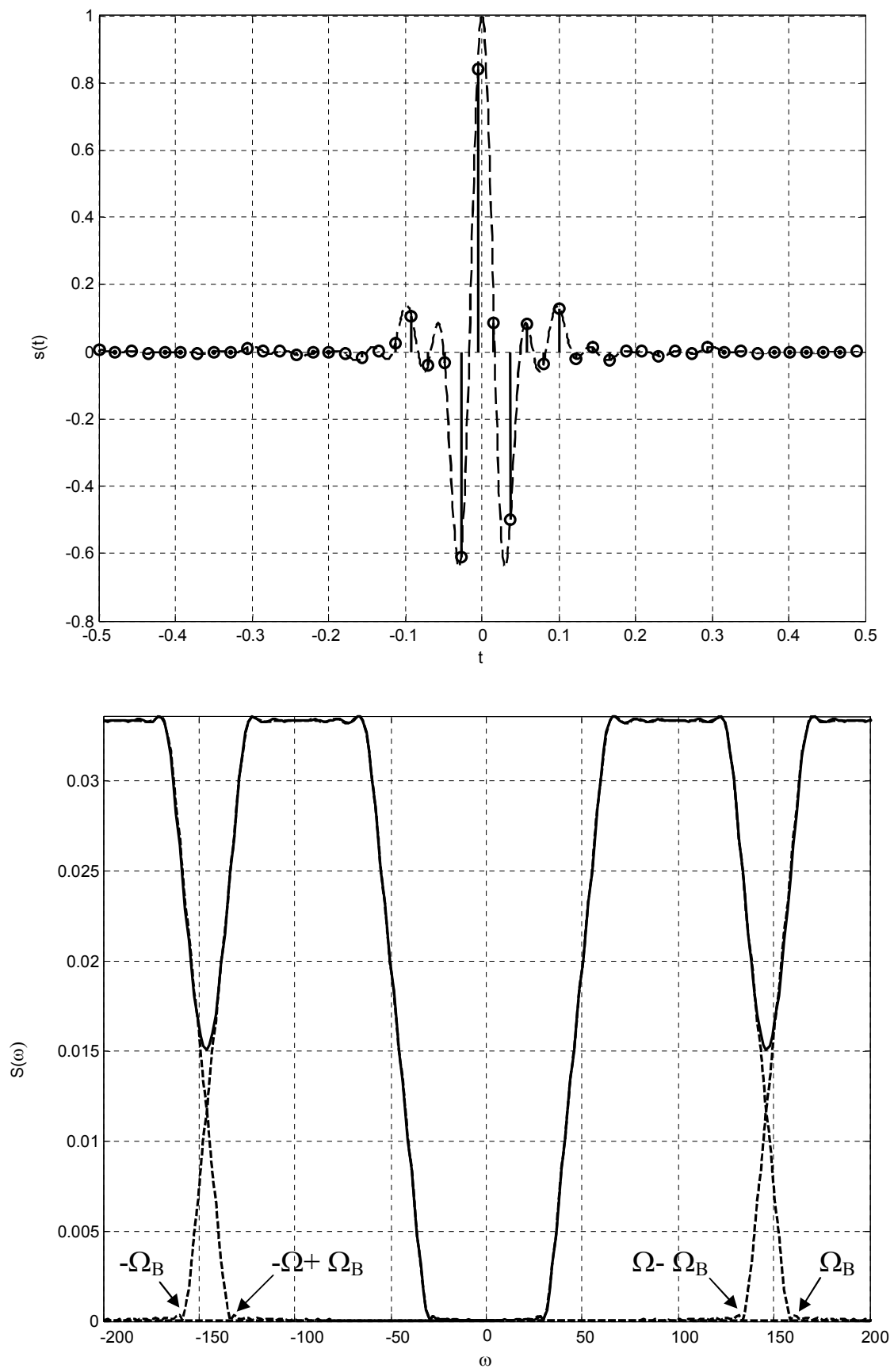


Рис. 2.2

Из рисунка видно, что в областях частот $[-\Omega_B, -\Omega + \Omega_B]$ и $[\Omega_B, \Omega - \Omega_B]$ верхняя боковая полоса одного периода накладывается на нижнюю боковую полосу другого периода функции $S(\omega)$. Происходит явление наложения, вследствие которого $\tilde{S}(\omega) \neq S(\omega)$ при $|\omega| \leq \Omega_B$. Спектр дискретной последовательности отсчетов сигнала $\tilde{S}(\omega)$ искажается по сравнению со спектральной функцией непрерывного сигнала. В то же время при выполнении условия $\Omega_B \leq \Omega - \Omega_B$ наложения не возникает, $\tilde{S}(\omega) = S(\omega)$ при $|\omega| \leq \Omega_B$, и восстановление оказывается возможным. Условие $\Omega_B \leq \Omega - \Omega_B$ и приводит к критерию (2.6).

Таким образом, модель сигнала $s(t)$ может быть образована из отсчетов сигнала, взятых с периодом дискретизации, удовлетворяющим условию Найквиста-Котельникова (2.6). Такой метод моделирования сигналов называется *методом несущей*. Достоинством метода является его простота. Однако методу присущ серьезный недостаток – он требует выделения большого объема памяти ЭВМ для представления сигналов.

Действительно, при высокой несущей частоте ω_0 ($\omega_0 \gg \Delta\Omega$, $\Delta\Omega$ – ширина спектра сигнала) $\Omega_B \approx \omega_0 + \Delta\Omega/2$, и ПД должен быть меньше половины периода несущей частоты. Столь малый ПД делает необходимым генерацию и запоминание большого числа отсчетов сигнала N . Поэтому при моделировании ВЧ и СВЧ сигналов на интервалах времени значительно больших периода колебаний используют другой метод представления – *метод огибающей*.

Запишем сигнал (2.1) в виде

$$s(t) = u(t)\cos\omega_0 t + v(t)\sin\omega_0 t \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} u(t) &= a(t)\cos[\varphi(t) + \varphi_0], \\ v(t) &= a(t)\sin[\varphi(t) + \varphi_0] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Процессы $u(t)$ и $v(t)$ называются *квадратурами сигнала* $s(t)$, а комплексный сигнал

$$w(t) = u(t) + iv(t) = a(t)\exp[\varphi(t) + \varphi_0] \quad (2.10)$$

называется *комплексной огибающей* сигнала. Сигнал $s(t)$ может быть восстановлен по своей комплексной огибающей $w(t)$ на основании следующего соотношения

$$s(t) = \operatorname{Re}\{w(t)e^{i\omega_0 t}\} = 0,5\{w(t)e^{i\omega_0 t} + w^*(t)e^{-i\omega_0 t}\} \quad (2.11)$$

где $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ - оператор взятия действительной части комплексного числа;
 $w^*(t) = u(t) - iv(t)$.

Возьмем преобразование Фурье от правой и левой частей уравнения (2.11). Получим

$$S(\omega) = 0,5\{W(\omega - \omega_0) + W^*(-\omega - \omega_0)\} \quad (2.12)$$

где $W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt$ - спектральная функция комплексной огибающей.

Допустим, что скорость изменения процессов $a(t)$ и $\varphi(t)$ значительно меньше, чем скорость изменения во времени гармонического сигнала $e^{-i\omega_0 t}$. Тогда, очевидно, ширина спектра сигналов $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ будет значительно меньше несущей частоты ω_0 . При этом функции $W(\omega - \omega_0)$ и $W^*(-\omega - \omega_0)$, разнесенные друг от друга по частоте на расстояние $2\omega_0$, не пересекаются. Тогда функция $W(\omega - \omega_0)$ может быть ассоциирована с частью спектра сигнала $S(\omega)$, сконцентрированной в окрестности частоты ω_0 в области положительных частот, а функция $W(-\omega - \omega_0)$ - с частью спектра $S(\omega)$, сконцентрированной в окрестности частоты $-\omega_0$ в области отрицательных частот (см. рис. 2.1). Примерный вид спектров $S(\omega)$ и $W(\omega)$ представлен на рис. 2.3.

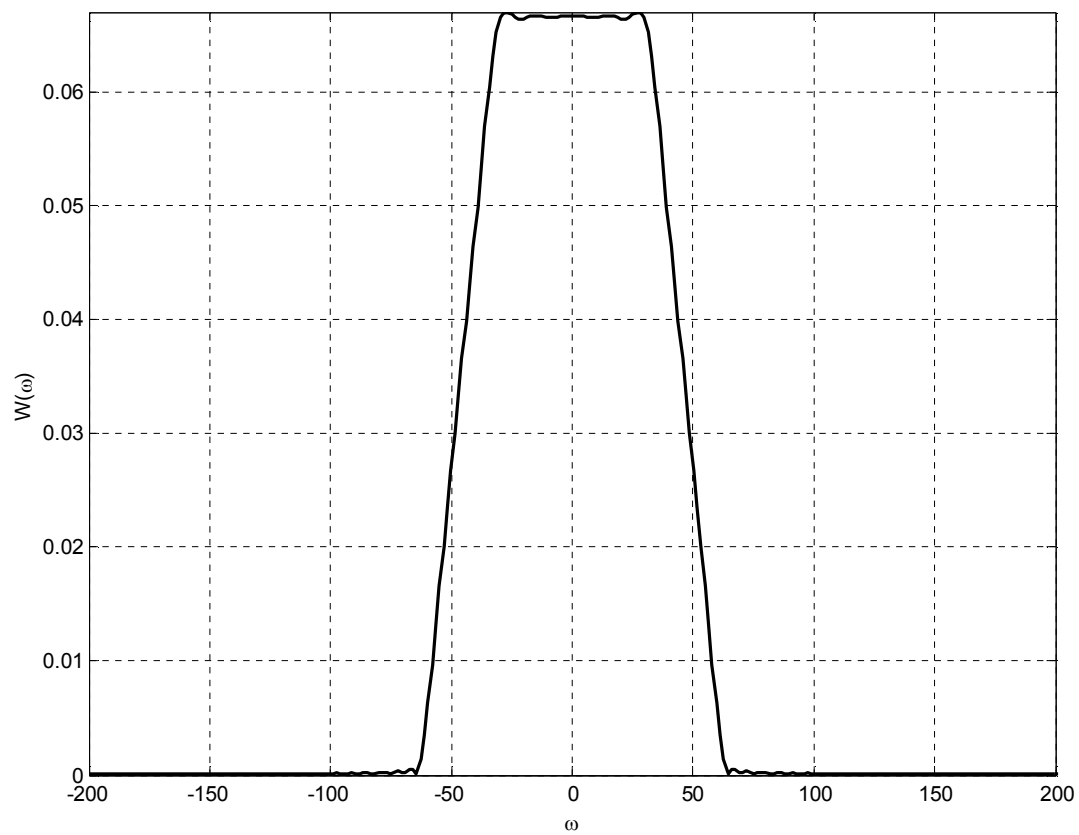
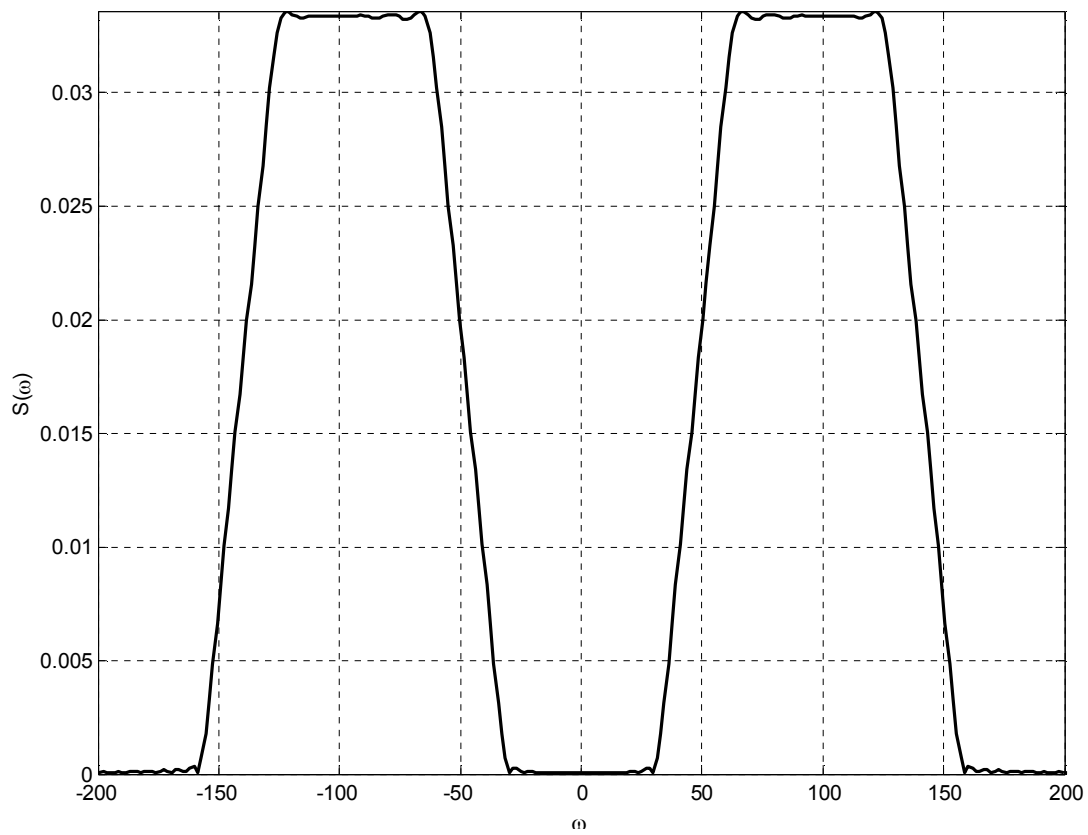


Рис. 2.3

Поскольку между $s(t)$ и $w(t)$ существует связь (2.11), а верхняя частота Ω_B спектра $W(\omega)$ значительно ниже несущей ω_0 ($\Omega_B \ll \omega_0$), сигнал $s(t)$ может быть представлен отсчетами своей комплексной огибающей $w[n] = w(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В данном случае ПД выбирается также на основании соотношения (2.6), однако участвующая в этом неравенстве частота $F_B = \Omega_B / 2\pi$ соответствует верхней частоте спектра комплексной огибающей $W(\omega)$. Поэтому при одинаковом времени наблюдения T_n количество отсчетов необходимых для представления в дискретном времени сигнала $w(t)$ значительно меньше количества отсчетов сигнала $s(t)$ по методу несущей. Метод представления сигнала $s(t)$ с помощью процесса $w(t)$ называется *методом огибающей*. Данный метод позволяет значительно сократить объем памяти ЭВМ, используемой для хранения сигнала $s(t)$ по сравнению с методом несущей. Однако данный метод имеет и недостаток: огибающая $w(t)$ является комплексным процессом, что делает необходимым хранение $N = 2[T_n/T - 1]$ отсчетов и использование при моделировании комплексной арифметики.

2.2. Моделирование радиосигналов со случайными параметрами

Сигнал $s(t, \lambda)$ называется *сигналом со случайными параметрами*, если λ - случайная величина (вектор), а закон изменения $s(t, \lambda)$ во времени известен, если известно значение случайного параметра λ . Поскольку параметры сигнала не изменяются во времени (изменения происходят лишь от реализации к реализации) методы моделирования сигнала $s(t, \lambda)$ принципиально ничем не отличаются от случая полностью детерминированного сигнала за исключением того, что при создании модели необходимо случайным образом изменять λ от опыта к опыту. Целью настоящего раздела является изложение методов генерации случайных величин с заданными законами распределения вероятностей.

2.2.1. Методы генерации случайных величин с равномерным на интервале $[0, 1]$ законом распределения

Получение случайных величин с равномерным на интервале $[0, 1]$ законом распределения является базовой операцией для генерации случайных величин с произвольным законом распределения. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $[0, 1]$, если ее плотность вероятности равна

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{при др. } x \end{cases} \quad (2.13)$$

Интегральная функция распределения ξ при этом имеет вид

$$F_{\xi}(x) = \Pr\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty \end{cases} \quad (2.14)$$

где $\Pr\{\cdot\}$ - вероятность соответствующего события.

Графики функций $f_{\xi}(x)$ и $F_{\xi}(x)$ приведены на рис. 2.4.

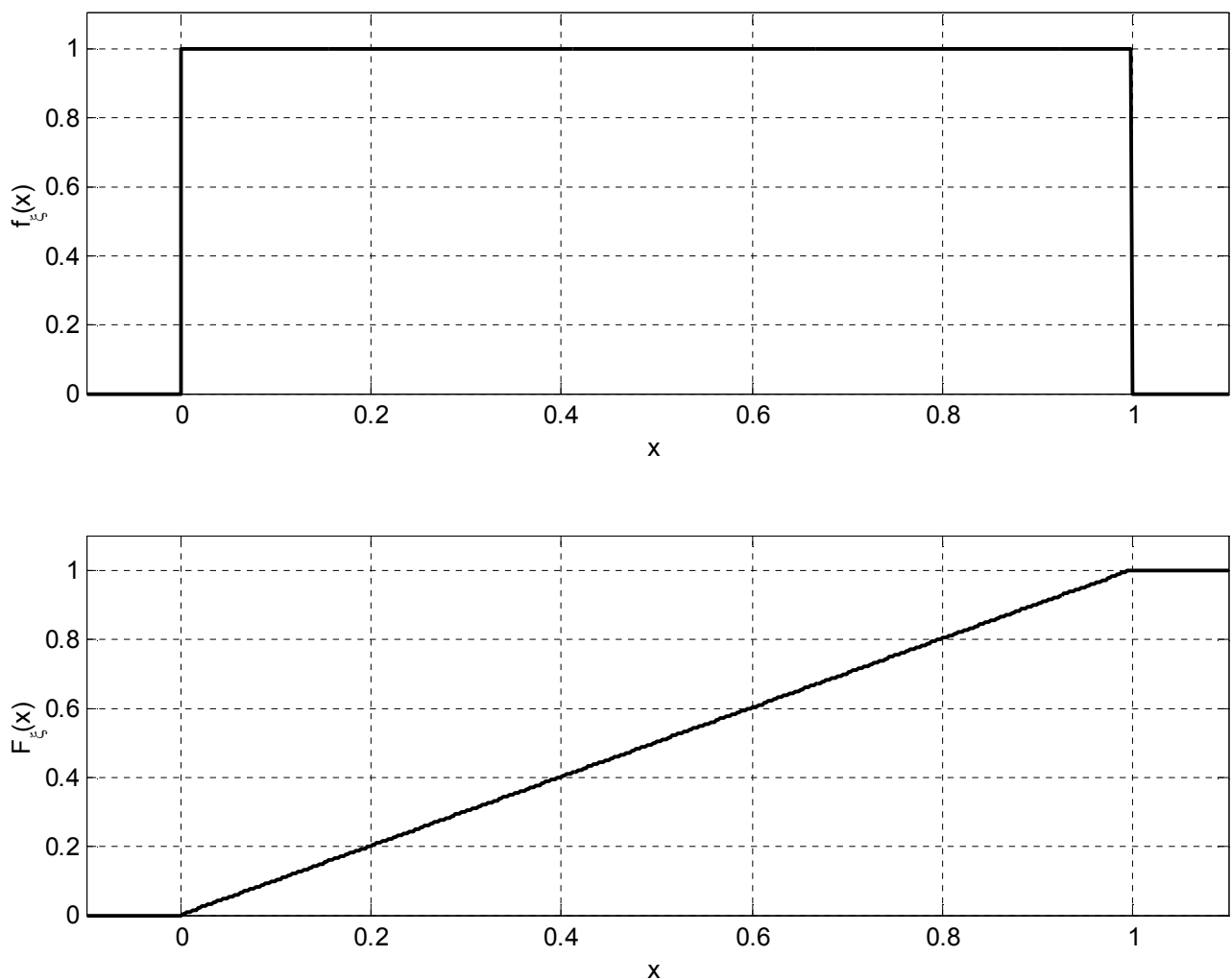


Рис. 2.4

Отметим, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны

$$E\{\xi\} = \frac{1}{2}, D\{\xi\} = \frac{1}{12} \quad (2.15)$$

До появления ЭВМ для получения случайных чисел с равномерным законом распределения использовались специальные математические таблицы или генераторы шума. В настоящее время созданы надежные способы генерации случайных чисел на ЭВМ.

Пусть даны два числа m и M , причем $m \leq p$, p - разрядность процессора. Для получения последовательности случайных чисел ξ_1, ξ_2, \dots используется следующий алгоритм:

1-й шаг. Задается некоторое целое число u_0 , $0 \leq u_0 \leq 2^m$.

2-й шаг. По рекуррентному правилу

$$u_n = (Mu_{n-1}) \bmod(2^m), n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

вычисляется случайное число u_n , $0 \leq u_n \leq 2^m$.

3-й шаг. Вычисляется

$$\xi_n = u_n \cdot 2^{-m}, n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

В силу ограниченности разрядности процессора ЭВМ количество различных чисел $\{u_n\}$ также ограничено и не может превысить величины $2^p - 1$. Поэтому числа ξ_1, ξ_2, \dots правильнее было бы называть *псевдослучайными*, поскольку, как следует из анализа (2.16), эта последовательность будет периодической с периодом меньшим или равным 2^m . Более того, из-за конечности разрядной сетки процессора получающиеся числа будут представлять реализации дискретной, а не непрерывной случайной величины. Однако при больших p и m этими обстоятельствами можно пренебречь. Числа M и m выбирают заранее таким образом, чтобы получить последовательность псевдослучайных чисел максимальной длины и минимальной коррелированности соседних значений.

Очевидно, что получающаяся последовательность целиком определяется числом u_0 , которое называется *зерном (seed)*. В ЭВМ это число может быть задано явно, или для его задания по умолчанию может использоваться внутренний таймер компьютера.

В связи с вышесказанным алгоритм генерации псевдослучайных чисел с равномерным в интервале $[0, 1]$ распределением может быть представлен в более простой рекуррентной форме

$$\xi_0 = u_0 \cdot 2^{-m}, \xi_n = \{M\xi_{n-1}\}, n = 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

где фигурные скобки $\{\cdot\}$ означают взятие дробной части произведения.

2.2.2. Методы генерации случайных величин с произвольным законом распределения

2.2.2.1. Метод обратных функций (метод нелинейного преобразования обратной функции распределения)

Этот метод основан на следующей теореме теории вероятностей: если имеется случайная величина η с плотностью распределения вероятности $f_\eta(y)$, то случайная величина ξ

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f_\eta(y) dy \quad (2.19)$$

имеет равномерный закон распределения на интервале $[0,1]$. Действительно, найдем вероятность $\Pr\{\xi < x\} = F_\xi(x)$, где x - некоторое действительное число из интервала $[0,1]$; $F_\xi(x)$ - интегральная функция распределения случайной величины ξ . Для этого заметим, что интеграл, стоящий в правой части (2.19) равен интегральной функции распределения случайной величины η

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^y f_\eta(y) dy \quad (2.20)$$

и в силу того, что $f_\eta(y) \geq 0$, является возрастающей функцией верхнего предела y . Тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$F_\xi(x) = \Pr\{\xi < x\} = \Pr\{F_\eta(\eta) < x\} = \Pr\{\eta < F_\eta^{-1}(x)\} = F(F_\eta^{-1}(x)) = x$$

где $F_\eta^{-1}(x)$ - функция обратная интегральной функции распределения $F_\eta(y)$. Если $x < 0$, то поскольку интеграл в правой части (2.19) не может быть отрицательным, $\Pr\{\xi < x\} = 0$. Аналогично, если $x > 1$, то $\Pr\{\xi < x\} = 1$, т.к. значение этого интеграла не может быть больше единицы. Таким образом

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases} \quad (2.21)$$

Следовательно, случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале $[0,1]$. Это дает возможность предложить следующий алгоритм генерации случайной величины с произвольным законом распределения:

1-й шаг. Генерируется случайная величина ξ с равномерным в интервале $[0,1]$ законом распределения.

2-й шаг. Искомая случайная величина η получается в результате следующих вычислений

$$\eta = F_{\eta}^{-1}(\xi) \quad (2.22)$$

где $F_{\eta}^{-1}(x)$ - функция обратная интегральной функции распределения $F_{\eta}(y)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Необходимо получить случайные числа η_i с плотностью распределения вероятности $f_{\eta}(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$ и интегральной функцией вероятности $F_{\eta}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$.

Согласно теореме $\xi_i = \lambda \int_0^{\eta_i} e^{-\lambda y} dy$. Тогда $\xi_i = W_{\eta}(y_i) = 1 - e^{-\lambda \eta_i}$. Находим обратную функцию: $\eta_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_i)$. Число ξ_i распределено равномерно на интервале $[0,1]$. Тогда и разность $1 - \xi_i$ распределена равномерно на том же интервале. Поэтому последнее выражение можно упростить: $\eta_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$.

Пример 2. Необходимо получить случайные числа η_i с равномерным в интервале $[a,b]$ распределением. В этом случае $F_{\eta}(\eta_i) = \frac{\eta_i - a}{b - a}$. Обратная функция $\eta_i = a + (b - a)\xi_i$.

Пример 3. Необходимо получить случайные числа η_i , распределенные по закону Релея. У такого случайного числа плотность распределения вероятности и интегральная функция вероятности имеют соответственно вид

$$f_{\eta}(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0, \quad F_{\eta}(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0.$$

Случайные числа η_i можно получить путем следующего преобразования равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел ξ_i : $\eta_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \xi_i)}$ или $\eta_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(\xi_i)}$.

Недостатки рассмотренного метода заключаются в том, что

- иногда трудно найти обратную функцию (не берется интеграл в (2.19)),
- требуется достаточный расход машинного времени на вычисление обратной функции F_{η}^{-1} , которая, как правило, является сложной.

2.2.2.2. Метод кусочной аппроксимации плотности распределения вероятности (Метод Н. П. Бусленко)

Суть метода состоит в замене плотности распределения вероятности ступенчатой функцией – набором K прямоугольников, вписанных в нее и имеющих одинаковые площади.

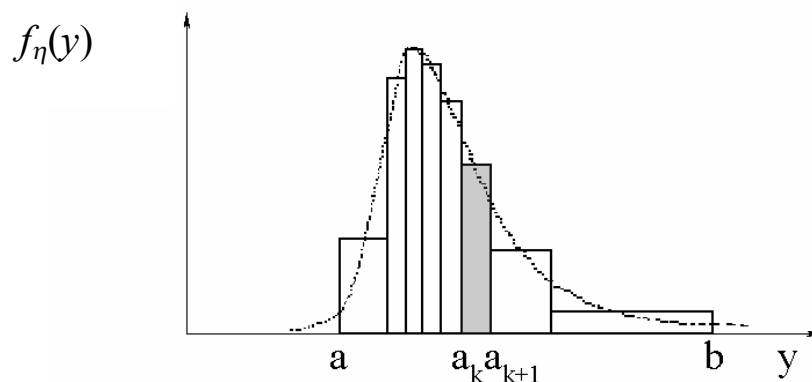


Рис. 2.5

Предварительно перед аппроксимацией плотность распределения вероятности подвергается усечению в хвостах на интервале $[a, b]$.

Площади K прямоугольников должны быть одинаковыми и равными $1/K$. Выделим прямоугольник с основанием $[a_k, a_{k+1}]$, его площадь

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_{\eta}(y) dy = \frac{1}{K} \quad (2.23)$$

На основании (2.23) последовательно вычисляются значения $a_1 = a, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{K+1} \geq b$, начиная с точки a и заканчивая точкой b .

Алгоритм моделирования заключается в последовательности следующих действий:

1-й шаг. Генерируется равномерно распределенное на интервале $[0, 1]$ случайное число ξ_1 .

2-й шаг. С помощью этого числа определяется номер $k = [(K - 1)\xi_1 + 1]$, где $[\cdot]$ - оператор округления до ближайшего целого. Таким образом, выделяется интервал $[a_k, a_{k+1}]$.

3-й шаг. Генерируется следующее число ξ_2 , равномерно распределенное на интервале $[0,1]$.

4-й шаг. Вычисляется случайное число $\tilde{\eta} = a_k + (a_{k+1} - a_k)\xi_2$. Число $\tilde{\eta}$ является реализацией случайной величины с заданным законом распределения.

Рассмотренный метод удобен при небольших K (до 64).

Докажем правильность данного алгоритма. Для этого рассмотрим интегральную функцию распределения случайной величины $\tilde{\eta}$

$$F_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \Pr\{\tilde{\eta} < \tilde{y}\} = \sum_{k=1}^K \Pr\{\tilde{\eta} < \tilde{y} \mid a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}\} \Pr\{a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}\}$$

Учитывая, что $\Pr\{a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}\} = 1/K$, а $\tilde{\eta} = a_k + (a_{k+1} - a_k)\xi_2$ при $a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}$, получим

$$F_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Pr\left\{\xi_2 < \frac{\tilde{y} - a_k}{a_{k+1} - a_k}\right\} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \int_0^{\frac{\tilde{y} - a_k}{a_{k+1} - a_k}} f_{\xi}(x) dx$$

В силу свойств функции $f_{\xi}(x)$ все интегралы под знаком суммы равны нулю за исключением одного с индексом m , для которого интервал $[a_m, a_{m+1}]$ содержит точку \tilde{y} . Тогда

$$F_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \frac{1}{K} \left\{ (m-1) + \frac{\tilde{y} - a_m}{a_{m+1} - a_m} \right\}, a_m \leq \tilde{y} < a_{m+1}$$

Дифференцируя данное равенство, получим плотность распределения случайной величины $\tilde{\eta}$

$$f_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \frac{1}{K(a_{m+1} - a_m)} = \frac{1}{(a_{m+1} - a_m)} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f_{\eta}(y) dy = f_{\eta}(y)$$

где y - некоторая точка из интервала $[a_m, a_{m+1}]$, причем в общем случае $\tilde{y} \neq y$. Последнее равенство записано на основании теоремы о среднем (теоремы Лагранжа). Следовательно, при малой протяженности интервалов, на которые делился интервал $[a, b]$, плотности распределения случайных величин $\tilde{\eta}$ и η совпадают с высокой точностью. Это доказывает правильность рассматриваемого алгоритма.

Достоинством метода Бусленко является малое число операций, не зависящее от K . Недостатком метода является то, что точность

аппроксимации плотности прямоугольниками не одинакова на всем интервале задания плотности $[a, b]$ и зависит от значения плотности $f_\eta(y)$. Чем меньше $f_\eta(y)$ на данном интервале, тем меньше точность, так как основание вписанного прямоугольника больше.

2.2.2.3. Метод отбора Неймана (метод отказов)

Этот метод также предполагает усечение плотности вероятности справа и слева на некотором интервале. Случайная величина η характеризуется плотностью распределения вероятности $f_\eta(y)$, которая усекается на интервале $[a, b]$.

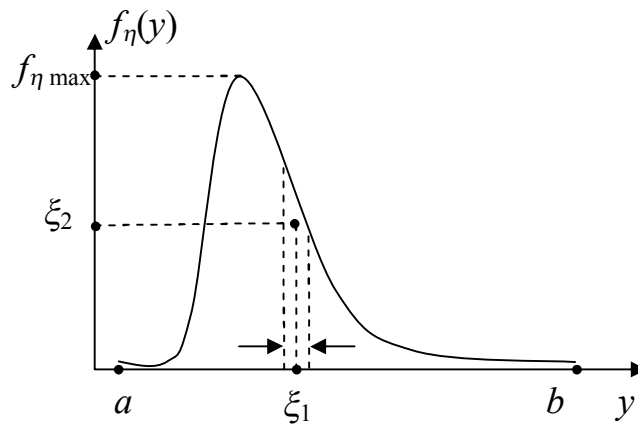


Рис. 2.6

Затем генерируются два равномерно распределенных случайных числа: ξ_1 и ξ_2 и осуществляется проверка, попадает ли точка с координатами $[a + (b - a)\xi_1, f_{\eta \max} \xi_2]$ под кривую плотности вероятности. Здесь $f_{\eta \max}$ - максимум плотности $f_\eta(y)$. Если это так, то запоминается первое число ξ_1 , которое и используется для вычисления значения случайной величины $\eta = \xi_1$. Если точка $[a + (b - a)\xi_1, f_{\eta \max} \xi_2]$ не попала под кривую плотности, генерируется новая пара ξ_1 и ξ_2 .

Докажем правильность рассматриваемого алгоритма. Критерием отбора пары ξ_1 и ξ_2 является очевидное неравенство (см. рис. 2.6)

$$\xi_2 \leq \frac{f_\eta(\xi_1)}{f_{\eta \max}} \quad (2.24)$$

Пары случайных чисел, удовлетворяющие этому условию, можно рассматривать как координаты случайных чисел на плоскости, равномерно

распределенных вдоль осей y и $f_\eta(y)$. Вероятность того, что случайная точка на плоскости, попавшая под кривую $f_\eta(y)$, окажется в элементарной полосе с основанием $[y, y + \Delta y]$ равна, очевидно, площади этой полосы, т.е. $f_\eta(y)\Delta y$.

Это и есть условие необходимое для того, чтобы случайная величина $\eta = a + (b - a)\xi_1$ имела заданную плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$.

Таким образом, алгоритм получения последовательности случайных чисел, обладающих заданной плотностью, может быть сформулирован следующим образом:

1-й шаг. Из исходной совокупности равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$ чисел выбираем пары ξ_1 и ξ_2 .

2-й шаг. Для этих чисел осуществляется проверка неравенства (2.24).

3-й шаг. Если неравенство (2.24) справедливо то переходим к шагу 4.

В противном случае к шагу 1.

4-й шаг. Если неравенство выполняется, то очередное число определяется согласно соотношению - $\eta = a + (b - a)\xi_1$.

Описанная выше процедура отбора случайных чисел может потребовать существенного числа вычислений, в основном за счет вычисления правой части неравенства (2.24). Кроме того, не все пары чисел ξ_1 и ξ_2 будут удовлетворять (2.24) и, следовательно, некоторая часть этих пар будет отброшена. Несложно показать, что вероятность быть отброшенной

для некоторой пары ξ_1 и ξ_2 равна $P_{отб} = \left(1 - \frac{1}{f_{\eta \max}(b - a)}\right)$. Очевидно, что с

увеличением площади прямоугольника, в который вписывается график плотности распределения вероятностей $f_\eta(y)$, эта вероятность быстро стремится к единице. Большое количество отброшенных пар приводит к дополнительным затратам машинного времени.

2.2.2.4. Генерация дискретных случайных величин

Случайная величина η называется *дискретной*, если область ее значений – конечное или счетное множество $\{y_1, y_2, \dots\}$, т.е. множество все элементы которого можно перенумеровать. Закон распределения вероятностей задается множеством $\{p_1, p_2, \dots\}$, где $p_m = \Pr\{\eta = y_m\}$ - вероятность того, что в ходе эксперимента случайная величина примет значение y_m . Для данного множества вероятностей должно выполняться условие нормировки

$$\sum_m p_m = 1 \quad (2.25)$$

Алгоритм генерации значений случайной величины η включает в себя следующие шаги:

1-й шаг. Интервал $[0,1]$ разбивается точками $0 = a_0, a_1, a_2, \dots$ на отрезки длиной p_1, p_2, \dots . В силу (2.25) количество таких отрезков будет равно количеству значений случайной величины, а последний отрезок своим правым концом будет иметь граничную точку 1.

2-й шаг. Генерируется случайная величина ξ с равномерным на интервале $[0,1]$ распределением и определяется номер отрезка m , на который выпадает ξ .

3-й шаг. Значение случайной величины определяется как

$$\eta = y_m \quad (2.26)$$

Докажем, что алгоритм действительно дает нужный результат. Для этого определим вероятность $\Pr\{\eta = y_m\}$

$$\Pr\{\eta = y_m\} = \Pr\{a_m \leq \xi < a_{m+1}\} = a_{m+1} - a_m = p_m$$

Полученное равенство доказывает правильность алгоритма. Данный алгоритм позволяет генерировать дискретные случайные величины, число состояний которых может быть конечным или счетным бесконечным.

2.2.2.5. Моделирование случайных величин с нормальным законом распределения вероятностей

Нормальные случайные величины играют особую роль в теории вероятностей, математической статистике, физике, радиотехнике. Связано это с тем, что ошибки измерений для многих физических величин имеют плотность распределения вероятностей близкую к нормальной

$$g(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, |x| < \infty \quad (2.27)$$

где μ - математическое ожидание, σ^2 - дисперсия. Интегральная функция распределения равна

$$G(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right\} \quad (2.28)$$

где $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ - функция ошибок. В связи с тем, что $G(x)$ не

выражается через элементарные функции, метод обратной функции не может быть использован для генерации нормальных случайных величин. Поэтому в данном случае используются другие методы. Прежде чем приступить к их изложению, сделаем одно замечание. Назовем *стандартной* нормальную случайную величину ξ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Ее плотность распределения равна

$$g_0(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, |x| < \infty \quad (2.29)$$

Стандартную случайную величину простым линейным преобразованием

$$\eta = \sigma\xi + \mu \quad (2.30)$$

можно преобразовать в случайную величину с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать методы моделирования стандартной нормальной случайной величины.

Первый метод генерации использует установленный в теории вероятностей факт, что случайный вектор $\xi = (\xi_R, \xi_I)^T$, компонентами которого являются нормальные независимые случайные величины ξ_R и ξ_I с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, имеет длину $\rho = \sqrt{\xi_R^2 + \xi_I^2}$, распределенную по закону Релея, и фазу $\varphi = \arctg(\xi_I/\xi_R)$, равномерно распределенную на интервале $[0, 2\pi]$. Тогда случайные величины ξ_R и ξ_I могут быть получены из случайных величин ρ и φ простым переходом из полярной системы координат (ρ, φ) в декартову

$$\xi_R = \rho \cos \varphi, \xi_I = \rho \sin \varphi \quad (2.31)$$

Для генерации же ρ и φ может быть использован метод обратной функции (см. раздел 2.2.2.1, примеры 2, 3)

$$\rho = \sqrt{-2 \ln \xi_1}, \varphi = 2\pi\xi_2 \quad (2.32)$$

где ξ_1 и ξ_2 - независимые равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$ случайные величины.

Данный метод моделирования часто используется для генерации комплексных случайных величин, т.к. позволяет одновременно получать значения их действительной и мнимой частей. Недостатком данного метода

является необходимость вычислять значения четырех элементарных функций: \sin , \cos , \ln , $\sqrt{}$. Это значительно увеличивает время генерации.

При повышенных требованиях к быстродействию моделирующих программ используют второй метод, основанный на *центральной предельной теореме* теории вероятностей: распределение случайной величины

$$\xi = \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n - \mu \right] \quad (2.33)$$

Полученной в результате суммирования независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, которые имеют произвольный закон распределения с

математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , при увеличении N стремится к стандартному нормальному распределению $g_0(x)$. Иными словами среднее арифметическое N произвольно распределенных

случайных величин $\eta = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n$ является при больших N нормальной

случайной величиной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2/N .

Основываясь на этом факте, для генерации стандартной нормальной случайной величины используют $N = 8 \dots 12$ случайных величин с равномерным в интервале $[0,1]$ распределением. Удобно выбрать $N = 12$ и получить

$$\xi = \sum_{n=1}^{12} \xi_n - 6 \quad (2.34)$$

Число N можно уменьшить, если ввести специальную поправку

$$\xi = \tilde{\xi} + \frac{1}{20N} (\tilde{\xi}^3 - 3\tilde{\xi}) \quad (2.35)$$

где $\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{12}{N}} \sum_{n=1}^N \left(\xi_n - \frac{1}{2} \right)$. При использовании (2.35) N можно взять равным $5 \dots 7$.

Рассмотренный метод генерации значительно лучше по быстродействию, чем первый. Однако при этом величина ξ имеет ограниченную область значений. При необходимости воспроизведения больших выбросов ξ предпочтение следует отдать первому методу генерации.

2.2.3. Методы генерации случайных векторов

Вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T$ называется *случайным*, если его компоненты – случайные величины. В отсутствие статистической связи между компонентами генерация вектора $\boldsymbol{\eta}$ сводится к генерации M независимых случайных величин, и может быть проведена рассмотренными выше методами. Однако на практике чаще встречается случай, когда компоненты вектора зависимы. При этом задача моделирования значительно усложняется. Практическое использование при решении данной задачи нашли два метода – *метод условных вероятностей* и *обобщенный метод Неймана*.

2.2.3.1. Метод условных вероятностей

Случайный вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T$ считается полностью описанным с вероятностной точки зрения, если известна совместная M -мерная плотность распределения вероятностей $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$ или соответствующая ей интегральная функция распределения

$$F_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M) = \int_{-\infty}^{y_1} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{y_M} dy_M f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$$

Совместную плотность вероятности можно представить в виде

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M) = f_{\eta_1}(y_1) f_{\boldsymbol{\eta}_{1|\eta_1}}(y_2, \dots, y_M | y_1)$$

где $f_{\eta_1}(y_1)$ - безусловная плотность распределения случайной величины η_1 ; $f_{\boldsymbol{\eta}_{1|\eta_1}}(y_2, \dots, y_M | y_1)$ - условная плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_{1|} = (\eta_2, \dots, \eta_M)^T$ при условии, что $\eta_1 = y_1$. Эту условную плотность в свою очередь можно представить в виде произведения

$$f_{\boldsymbol{\eta}_{1|\eta_1}}(y_2, \dots, y_M | y_1) = f_{\eta_2|\eta_1}(y_2 | y_1) f_{\boldsymbol{\eta}_{2|\eta_1, \eta_2}}(y_3, \dots, y_M | y_1, y_2)$$

где $f_{\eta_2|\eta_1}(y_2 | y_1)$ - условная плотность распределения случайной величины η_2 при условии, что $\eta_1 = y_1$; $f_{\boldsymbol{\eta}_{2|\eta_1, \eta_2}}(y_3, \dots, y_M | y_1, y_2)$ - условная плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_2 = (\eta_3, \dots, \eta_M)^T$ при условии, что $\eta_1 = y_1$, $\eta_2 = y_2$. Продолжая подобным образом, можно получить следующее представление M -мерная плотности в виде произведения M одномерных плотностей, $M - 1$ из которых являются условными

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M) = f_{\eta_1}(y_1) \prod_{m=2}^M f_{\eta_m|\eta_1, \dots, \eta_{m-1}}(y_m|y_1, \dots, y_{m-1}) \quad (2.36)$$

Все входящие в правую часть (2.36) одномерные плотности можно получить интегрированием исходной M -мерная плотности

$$\begin{aligned} f_{\eta_1}(y_1) &= \int f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \dots, y_M) dy_2 \dots dy_M \\ f_{\eta_2|\eta_1}(y_2|y_1) &= \frac{1}{f_{\eta_1}(y_1)} \int f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \dots, y_M) dy_3 \dots dy_M \\ f_{\eta_3|\eta_1, \eta_2}(y_3|y_1, y_2) &= \frac{1}{f_{\eta_1}(y_1) f_{\eta_2|\eta_1}(y_2|y_1)} \int f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \dots, y_M) dy_4 \dots dy_M \end{aligned}$$

и т.д.

На основании (2.36) можно предложить следующий алгоритм моделирования случайного вектора $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T$:

1-й шаг. По известной плотности $f_{\eta_1}(y_1)$ генерируется значение случайной величины η_1 ;

2-й шаг. По известной плотности $f_{\eta_2|\eta_1}(y_2|\eta_1)$ генерируется значение случайной величины η_2 ;

.....
m-й шаг. По известной плотности $f_{\eta_m|\eta_1, \dots, \eta_{m-1}}(y_m|\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$

генерируется значение случайной величины η_m и т.д.

На каждом из M шагов моделируется соответствующая компонента вектора $\boldsymbol{\eta}$ при использовании любого из рассмотренным выше методов генерации одномерных случайных величин.

Данный метод является достаточно простым с точки зрения его программной реализации. Однако у него есть существенный недостаток – необходимость вычислять многомерные интегралы для определения условных плотностей распределения вероятностей.

2.2.3.2. Обобщенный метод Неймана

Данный метод, как следует из его названия, является непосредственным обобщением метода Неймана (см. раздел 2.2.2.3). Впишем плотность $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$ в некоторый $(M + 1)$ -мерный параллелепипед $\{a_1 \leq y_1 < b_1, \dots, a_M \leq y_M < b_M, 0 \leq f_{\boldsymbol{\eta}} \leq f_{\boldsymbol{\eta}\max}\}$, где $f_{\boldsymbol{\eta}\max}$ - максимальное значение функции $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$. Если плотность $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$ имеет бесконечные хвосты, то их необходимо усечь, причем сделать это следует так, чтобы

вероятность попадания случайного вектора $\boldsymbol{\eta}$ за пределы $(M + 1)$ -мерного параллелепипеда была пренебрежимо малой. Алгоритм моделирования $\boldsymbol{\eta}$ состоит в выполнении следующих шагов:

1-й шаг. Генерируется $M + 1$ независимая случайная величина $\{\eta_m\}_{m=1}^{M+1}$, из которых M первых равномерно распределены в интервалах $[a_1, b_1), \dots, [a_M, b_M)$, а η_{M+1} - равномерно распределена в интервале $[0, f_{\eta_{\max}})$, где $f_{\eta_{\max}}$ - максимальное значение плотности $f_{\eta}(y_1, \dots, y_M)$ в параллелепипеде.

2-й шаг. Если выполняется условие $\eta_{M+1} < f_{\eta}(\eta_1, \dots, \eta_M)$, то очередная реализация случайного вектора получается как

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T \quad (2.37)$$

3-й шаг. Если условие $\eta_{M+1} < f_{\eta}(\eta_1, \dots, \eta_M)$ не выполняется, то числа $\{\eta_m\}_{m=1}^{M+1}$ отбрасываются и необходимо перейти на шаг 1.

Данному методу присущи те же достоинства и недостатки, что имеет и скалярный метод Неймана. Однако количество отброшенных реализаций $\{\eta_m\}_{m=1}^{M+1}$ при $M \geq 2$ будет существенно больше. Действительно, несложно показать, что вероятность быть отброшенной для некоторой реализации равна $P_{\text{отб}} = (1 - 1/V)$, где V - объем $(M + 1)$ -мерного параллелепипеда.

2.2.3.3. Моделирование нормальных случайных векторов

Случайные векторы с нормальным законом распределения

$$f_{\eta}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T R^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.38)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{\eta}$ - вектор математических ожиданий, а \mathbf{R}_{η} - корреляционная матрица, очень часто встречаются в задачах моделирования РТС. С задачей генерации случайных векторов можно встретиться при моделировании сигналов на выходе антенной решетки, содержащей M элементов, при моделировании обработки сигнальной пачки из M отсчетов и т.п.

Задача моделирования ставится так: пусть заданы $\boldsymbol{\mu}_{\eta}$ и \mathbf{R}_{η} , требуется найти алгоритм формирования случайного нормального вектора с заданным вектором математических ожиданий и корреляционной матрицей. В основе алгоритмов моделирования случайных нормальных векторов лежит следующая теорема теории вероятностей. Случайный вектор

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{a} \quad (2.39)$$

Полученный в результате линейного преобразования нормального случайного вектора ξ , также будет иметь нормальное распределение. Здесь \mathbf{A} и \mathbf{a} - неслучайные матрица и вектор соответственно.

Пусть ξ - случайный вектор, составленный из независимых стандартных нормальных случайных величин. При этом $\mu_\xi = \mathbf{0}$ и $\mathbf{R}_\xi = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} - единичная матрица. Найдем такую матрицу \mathbf{A} и вектор \mathbf{a} , чтобы η имел заданный вектор математических ожиданий μ_η и корреляционную матрицу \mathbf{R}_η . Начнем с отыскания вектора \mathbf{a} . Для этого найдем математическое ожидание обеих частей равенства (2.39)

$$\mu_\eta = E\{\eta\} = \mathbf{A}E\{\xi\} + \mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Следовательно, вектор $\mathbf{a} = \mu_\eta$.

Найдем теперь матрицу \mathbf{A} . Для этого представим $\eta - \mathbf{a} = \mathbf{A}\xi$ и для корреляционной матрицы \mathbf{R}_η получим

$$\mathbf{R}_\eta = E\{(\eta - \mathbf{a})(\eta - \mathbf{a})^T\} = E\{\mathbf{A}\xi\xi^T\mathbf{A}^T\} = \mathbf{A}E\{\xi\xi^T\}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

Следовательно, матрица \mathbf{A} должна находиться из условия

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{R}_\eta \quad (2.40)$$

Причем данная матрица может иметь любой вид. Если допустить, что матрица \mathbf{A} - нижняя треугольная (т.е. матрица все элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MM} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

то наша задача свелась к известному в линейной алгебре представлению симметрической матрицы \mathbf{R}_η в виде произведения двух треугольных матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^T . Такое представление называется *разложением Холецкого*. При этом элементы матрицы \mathbf{A} выражаются через элементы матрицы \mathbf{R}_η следующим образом

$$a_{11} = \sqrt{r_{11}}, a_{m1} = \frac{r_{m1}}{\sqrt{r_{11}}}, m = \overline{2, M},$$

$$a_{mm} = \left(r_{mm} - \sum_{n=1}^m a_{mn}^2 \right)^{1/2}, a_{mn} = \frac{1}{a_{mm}} \left(r_{mn} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{mk} r_{nk} \right) \quad (2.42)$$

где r_{mn} и a_{mn} - элементы матриц \mathbf{R}_η и \mathbf{A} , стоящие на пересечении m -й строки и n -го столбца. Для выполнения разложения Холецкого существуют соответствующие библиотечные подпрограммы.

Таким образом, алгоритм генерации нормального случайного вектора с заданным вектором математических ожиданий $\boldsymbol{\mu}_\eta$ и корреляционной матрицей \mathbf{R}_η имеет вид

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\mu}_\eta \quad (2.43)$$

где \mathbf{A} - матрица из разложения Холецкого для корреляционной матрицы, а $\boldsymbol{\xi}$ - вектор, составленный из независимых стандартных нормальных случайных величин.

2.3. Моделирование случайных процессов

Как отмечалось выше радиосигнал, являющийся носителем информации, весьма часто имеет случайный характер. То же самое можно сказать и про помехи и шумы, на фоне которых в РТС происходит обработка сигналов с целью выделения полезной информации. Поэтому моделирование случайных процессов – наиболее важная и часто встречающаяся задача, возникающая при моделировании РТС.

Для генерации случайных процессов хорошо разработаны алгоритмы получения стационарных гауссовских (нормальных) процессов и марковских процессов. Это объясняется математическими сложностями, возникающими при описании случайных процессов произвольной природы. Ограниченность методов генерации вышеназванными процессами не вызывает серьезных затруднений при моделировании РТС, поскольку именно гауссовские и марковские процессы являются наиболее близкими моделями случайных процессов, встречающихся на практике. Поэтому основное внимание в настоящем разделе будет уделено моделированию этих двух категорий случайных процессов. Если возникает необходимость генерации случайного процесса, который не может быть отнесен ни к одному из названных типов, то эту задачу решают приближенно. Один из методов приближенного решения рассмотрен в разделе 2.3.3.

2.3.1. Моделирование гауссовских случайных процессов с заданными корреляционными свойствами

2.3.1.1. Метод дискретного преобразования Фурье

Постановка задачи: требуется создать отрезок реализации комплексного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ длительности T_n , если известна его корреляционная функция (КФ) $R_\xi(\tau)$.

В соответствии с теоремой Винера – Хинчина спектральная плотность мощности (СПМ) случайного стационарного процесса $S_\xi(\omega)$ равна

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.44)$$

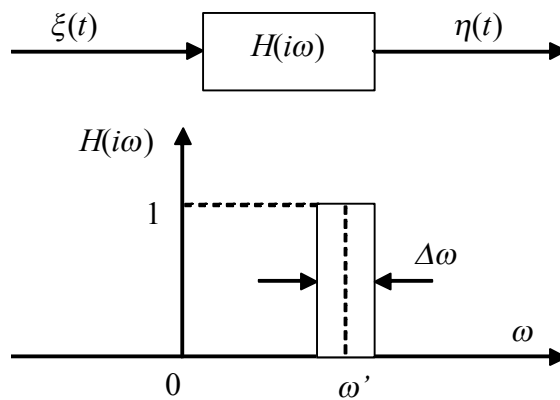


Рис. 2.7

Предположим, что процесс $\xi(t)$ поступает на вход узкополосного фильтра с прямоугольной частотной характеристикой, отличной от нуля в полосе частот $[\omega' - \Delta\omega/2, \omega' + \Delta\omega/2]$ (см. рис. 2.7), т.е.

$$H(i\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega'| \leq \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega'| > \Delta\omega/2 \end{cases}$$

где $\omega', \Delta\omega$ - средняя частота и ширина полосы пропускания фильтра. Тогда средняя мощность сигнала на выходе фильтра будет равна

$$P_{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) |H(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega' - \Delta\omega/2}^{\omega' + \Delta\omega/2} S_{\xi}(\omega) d\omega \quad (2.45)$$

Если функция $S_{\xi}(\omega)$ мало меняется в полосе частот $[\omega' - \Delta\omega/2, \omega' + \Delta\omega/2]$, то будет выполняться примерное равенство

$$P_{\eta} \approx S_{\xi}(\omega') \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (2.46)$$

причем (2.46) соблюдается тем точнее, чем меньше полоса $\Delta\omega$. Последнее уравнение определяет физический смысл функции $S_{\xi}(\omega)$: СПМ описывает распределение средней мощности случайного процесса $\xi(t)$ по частотам гармонических колебаний, входящих в его состав. Такая интерпретация СПМ и равенства (2.46) дает возможность предложить следующий метод генерации процесса $\xi(t)$. Разобьем частотную область на соприкасающиеся между собой полосы одинаковой ширины $\Delta\omega$. Средняя частота m -ой полосы равна $\omega_m = (m + 0,5)\Delta\omega$. Пусть величина $\Delta\omega$ взята настолько малой, что (2.46) выполняется с высокой точностью. Тогда сумму гармоник случайного процесса $\xi(t)$, попадающих в m -ю полосу, вследствие малости $\Delta\omega$ можно

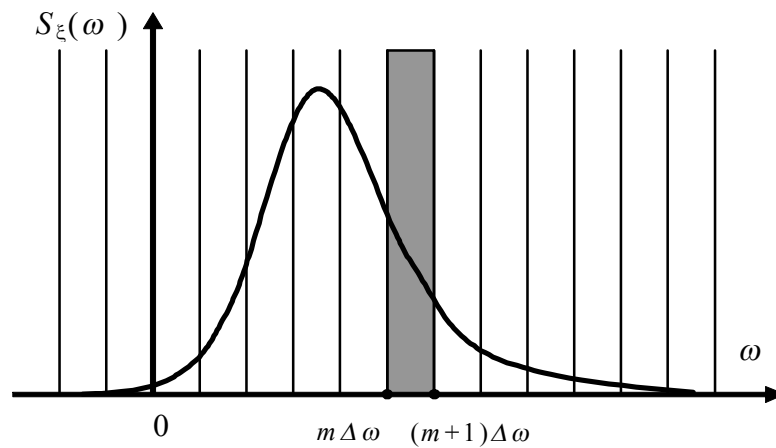


Рис. 2.8

заменить на одно гармоническое колебание частоты ω_m , которое имеет случайную амплитуду U_m и фазу φ_m . При этом для всего процесса будет справедливо следующее представление

$$\xi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m \exp\{i[\omega_m t + \varphi_m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{i\omega_m t} \quad (2.47)$$

где $x_m = U_m e^{i\varphi_m}$ - комплексная амплитуда m -й гармоники.

Из теории вероятностей известно, что сумма произвольного числа гауссовских случайных процессов также является гауссовской случайной величиной. Следовательно, поскольку процесс $\xi(t)$ - гауссовский, т.е. в любой момент времени t' случайная величина $\xi(t')$ распределена по нормальному закону, гармонические составляющие в правой части (2.47) также должны быть гауссовскими случайными процессами. Для этого достаточно, чтобы случайные величины U_m и φ_m при различных индексах m были независимы и имели соответственно плотность распределения Релея (U_m) и равномерную в интервале $[0, 2\pi]$ плотность (φ_m). Это требование эквивалентно тому, что амплитуды $x_m = U_m e^{i\varphi_m}$ должны быть комплексными гауссовскими случайными величинами, дисперсии которых D_m равны средней мощности процесса $\xi(t)$, приходящейся на m -ю полосу

$$D_m = \langle |x_m|^2 \rangle = S_\xi(\omega_m) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (2.48)$$

где треугольные скобки означают усреднение по ансамблю.

Если процесс $\xi(t)$ имеет ограниченный по частоте спектр, т.е. $S_\xi(\omega) = 0$ при $|\omega| > \Omega_B$, где Ω_B - верхняя частота спектра, то бесконечный ряд (2.47) можно заменить конечной суммой

$$\xi(t) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_m e^{i\omega_m t} \quad (2.49)$$

где $M \approx 2\Omega_B / \Delta\omega$ - количество гармоник, необходимое для моделирования случайного процесса. Тогда дискретные отсчеты процесса $\xi[n] = \xi(nT)$ во времени, взятые в соответствии с теоремой Котельникова с периодом дискретизации $T \leq \pi / \Omega_B$ могут быть получены как

$$\xi[n] = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_m e^{i \frac{2\pi}{N} nm} \quad (2.50)$$

где $\Delta\omega T = 2\pi / N$. Таким образом, отсчеты случайного процесса представляют собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $\{x_m\}_{m=-M/2}^{M/2-1}$. Соответствующим выбором $\Delta\omega$ и T можно сделать N равным целой степени числа 2 ($N = 2^l \geq M$, где l - целое число). Это дает возможность использовать для вычисления (2.50) алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Окончательно алгоритм генерации случайного процесса методом дискретного преобразования Фурье может быть представлен последовательностью следующих шагов:

1-й шаг. На основании заданной КФ (или СПМ) процесса выбираются $\Delta\omega, T, N$ и M так, чтобы N было целой степенью числа 2 ($N = 2^l \geq M$).

2-й шаг. Генерируется массив из M независимых комплексных случайных чисел z_m с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

3-й шаг. Вычисляются комплексные амплитуды $x_m = \sqrt{D_m} z_m$, где D_m определяются в соответствии с (2.48).

4-й шаг. На основании (2.50) с использованием алгоритма БПФ вычисляются дискретные отсчеты случайного процесса $\xi[n]$.

2.3.1.2. Метод формирующего фильтра

Генерация нормального случайного процесса методом формирующего фильтра основывается на двух положениях теории случайных процессов:

- результатом произвольного линейного преобразования гауссовского случайного процесса также является случайный гауссовский процесс;
- спектральные плотности мощности случайных и процессов на входе и выходе линейного фильтра с частотной характеристикой $H(i\omega)$ связаны соотношением

$$S_{\text{вых}}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{\text{вх}}(\omega) \quad (2.51)$$

Если предположить, что на вход фильтра поступает процесс типа белого шума ($S_{\text{бш}}(\omega) = N_0/2, |\omega| < \infty$), то СПМ процесса на выходе будет равна

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(i\omega)|^2 \quad (2.52)$$

Следовательно, для формирования гауссовского случайного процесса с заданной СПМ $S_{\xi}(\omega)$ необходимо на вход фильтра с частотной характеристикой, модуль которой равен

$$|H(i\omega)| = \sqrt{S_{\xi}(\omega)} \quad (2.53)$$

подать белый шум с единичной спектральной плотностью $N_0/2 = 1$. При этом сигнал на выходе фильтра будет иметь нормальное распределение в силу первого из вышеназванных положений, т.к. фильтрация – операция линейная. Фильтр, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которого удовлетворяет (2.53), называется *формирующим*.

Равенство (2.53) дает возможность вычислить лишь АЧХ и не определяет его фазочастотную характеристику (ФЧХ). Поэтому этот вопрос остается открытым и требует дополнительного исследования.

Допустим, что ФЧХ фильтра $\varphi(\omega) = 0, |\omega| < \infty$. Тогда $H(i\omega) = |H(i\omega)|$ и импульсная характеристика фильтра равна

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)| e^{i\omega t} d\omega$$

Так как $h(t) = h(-t)$, т.е. $h(t) \neq 0$ при $t < 0$, фильтр является физически нереализуемым (в физически реализуемом фильтре $h(t) = 0$ при $t < 0$).

Данный пример свидетельствует о том, что ФЧХ формирующего фильтра не может быть произвольной, и ее выбор должен быть сделан таким образом, чтобы фильтр был физически реализуем. Синтез такого фильтра в общем случае сложен. Однако, если СПМ процесса – дробно-рациональная функция вида

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{b_M \omega^{2M} + b_{M-1} \omega^{2(M-1)} + \dots + b_0}{a_N \omega^{2N} + a_{N-1} \omega^{2(N-1)} + \dots + a_0} \quad (2.54)$$

где $b_m, m = \overline{0, M}$ и $a_n, n = \overline{0, N}$ – действительные числа ($N \geq M$), то процедура синтеза формирующего фильтра проста и состоит в следующем.

Из теории алгебраических уравнений известно, что неотрицательный полином степени $2K$ имеет лишь K пар комплексно сопряженных корней. Пусть $\alpha_n, \alpha_n^*, n = \overline{1, N}$ и $\beta_m, \beta_m^*, m = \overline{1, M}$ корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе (2.54) соответственно. Тогда (2.54) можно переписать

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\prod_{m=1}^M (\omega - \beta_m) \prod_{m=1}^M (\omega - \beta_m^*)}{\prod_{n=1}^N (\omega - \alpha_n) \prod_{n=1}^N (\omega - \alpha_n^*)} \frac{b_M}{a_N} \quad (2.55)$$

Причем в силу того, что $S_{\xi}(\omega) \geq 0$, a_N и b_M – положительные числа, и обозначения корней $\alpha_n, \alpha_n^*, n = \overline{1, N}$ и $\beta_m, \beta_m^*, m = \overline{1, M}$ можно сделать такими, что α_n и β_m будут иметь положительные мнимые части

$$\text{Im}\{\alpha_n\} \geq 0, \text{Im}\{\beta_m\} \geq 0 \quad (2.56)$$

Сделаем в (2.55) замену переменной $\omega = -is$ в первой дроби и $\omega = is^*$ во второй (это возможно, т.к. ω – действительная переменная). Тогда

$$S_{\xi}(-is) = \frac{F(s)F(s^*)}{G(s)G(s^*)} = \frac{|F(s)|^2}{|G(s)|^2}, \quad (2.57)$$

где

$$F(s) = \sqrt{\frac{b_M}{a_N}} \prod_{m=1}^M (s - f_m) \quad (2.58)$$

$$G(s) = \prod_{n=1}^N (s - g_n) \quad (2.59)$$

$f_m = i\beta_m$, $g_n = i\alpha_n$. Вследствие условия (2.56) полиномы $F(s)$ и $G(s)$ имеют корни в левой полуплоскости комплексной переменной s . Поэтому, если взять в качестве частотной характеристики формирующего фильтра

$$H(s) = \frac{F(s)}{G(s)} \quad (2.60)$$

мы получим устойчивый реализуемый фильтр, АЧХ которого в силу (2.57) и (2.60) соответствует условию (2.53).

Таким образом, алгоритм моделирования гауссовского случайного процесса с заданными корреляционными (спектральными) свойствами состоит в пропускании реализации белого шума с единичной спектральной плотностью через линейный фильтр, частотная характеристика которого соответствует (2.60). Для успешного решения задачи моделирования методом формирующего фильтра необходимо, чтобы СПМ случайного процесса описывалась дробно-рациональной функцией от переменной ω вида (2.54). В ходе синтеза формирующего фильтра находят корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе (2.54), и приводят выражения для СПМ к виду (2.55). Затем определяют корни полиномов - α_n , $n = \overline{1, N}$ и β_m , $m = \overline{1, M}$, которые имеют положительные мнимые части (см. условие (2.56)), и составляют полиномы $F(s)$ и $G(s)$ в соответствии с (2.58) и (2.59). Частотная характеристика формирующего фильтра получается на основании (2.60). Необходимо заметить, что для получения отрезка случайного процесса с заданными свойствами на выходе формирующего фильтра необходимо, чтобы переходные процессы в фильтре закончились. Поэтому к сохранению выборки случайного процесса нужно перейти только после того, как модель проработала некоторое время на «холостом ходу». Обычно это время

оценивается как $(2..3)/\Delta f_{эф}$, где $\Delta f_{эф}$ - эффективная ширина полосы пропускания формирующего фильтра (см. ниже).

Полученный в ходе такого синтеза фильтр является аналоговым. Кроме того, белый шум, который подается на вход формирующего фильтра, также является «аналоговым» сигналом. Поэтому необходимо создать математические модели формирующего фильтра и белого шума. Первая задача - синтез математической модели формирующего аналогового фильтра, т.е. цифрового фильтра, рассмотрена в главе 3. Поэтому сейчас рассмотрим вопрос о генерации белого шума при цифровом моделировании.

Случайный процесс, который в научной литературе называется *белым шумом*, имеет спектральную плотность мощности $N_0/2$ постоянную во всей частотной области. Следовательно, его средняя мощность (дисперсия) бесконечна. Поэтому белый шум не является физически реальным процессом, а представляет собой удобную математическую абстракцию. При создании его цифровой модели необходимо сохранить два его основных свойства: постоянство СПМ в частотной области и статистическую независимость временных отсчетов, взятых в произвольные моменты времени. Второе свойство реализуется при моделировании весьма просто: за реализацию дискретного белого шума берется набор независимых случайных чисел, получающихся на выходе генератора случайных величин с нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией σ^2 . Очевидно, что величина этой дисперсии (т.е. средняя мощность процесса) должна быть каким-то образом связана со спектральной плотностью мощности «аналогового» белого шума $N_0/2$, дискретную модель которого мы создаем. Для того чтобы связать эти величины воспользуемся требованием постоянства СПМ в частотной области.

Известно, что при дискретизации непрерывного сигнала с периодом взятия отсчетов T , спектральная функция дискретизированного сигнала становится периодической с периодом $2\pi/T$. Поэтому, если СПМ нашего дискретного белого шума будет постоянна и равна $N_0/2$ на интервале $[-\pi/T, \pi/T]$, то автоматически она будет постоянна и во всей частотной области. С другой стороны, дисперсия случайного процесса с равномерной в указанном интервале СПМ равна (см. (2.45))

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{N_0}{2T}$$

Отсюда при $N_0/2 = 1$ получаем, что дисперсия независимых случайных чисел, составляющих реализацию дискретного белого шума должна быть равна

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \quad (2.61)$$

Следовательно, реализация дискретного белого шума размером в N отсчетов должна быть вычислена в соответствии со следующим равенством

$$\zeta[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} z[n], \quad n = \overline{1, N} \quad (2.62)$$

где $z[n]$ – случайные независимые числа с нормальным стандартным распределением.

2.3.2. Моделирование марковских случайных процессов

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого M его M -мерная плотность распределения вероятностей может быть записана в виде

$$f_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_M, t_M) = f_1(x_1, t_1) \prod_{m=2}^M f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1}) \quad (2.63)$$

где $f_1(x_1, t_1)$ - безусловная (одномерная) плотность распределения;
 $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1})$ - условная плотность распределения отсчета процесса в момент времени t_m при условии, что $\xi(t_{m-1}) = x_{m-1}$. В теории марковских процессов плотность распределения $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1})$ называется *плотностью перехода*.

На основании (2.63) можно сказать, что Марковский случайный процесс задан, если известны безусловная плотность распределения $f_1(x_1, t_1)$ и плотность перехода $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1})$. Причем плотность распределения отсчета $\xi(t_m)$ зависит лишь от значения процесса в предыдущий момент времени. Последнее свойство является особенностью марковских процессов, которая выделяет их из общего числа случайных функций. Сравнение (2.63) с записью многомерной плотности вероятности (2.36) дает возможность предложить для моделирования марковских процессов метод условных плотностей (см. раздел 2.2.3.1), который при известных безусловной плотности и плотности перехода реализуется в данном случае весьма просто.

Среди множества марковских процессов особо выделяют диффузионные процессы. Марковский процесс называется *диффузионным*, если среди множества коэффициентов

$$\begin{aligned}
K_n(x,t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t^{-1} E \{ [\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^n | \xi(t) = x \} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t^{-1} \int (y-x)^n f_{m|m-1}(y, t+\Delta t | x, t) dy, \quad n=1,2,3,\dots
\end{aligned} \tag{2.64}$$

только первые два $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ отличны от нуля ($K_n(x,t) = 0, n \geq 3$).

Для диффузионного процесса плотность перехода удовлетворяет прямому

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t; x_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial t} [a(x,t) f(x,t; x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} [b(x,t) f(x,t; x_0, t_0)] \tag{2.65}$$

и обратному

$$\frac{\partial}{\partial t_0} f(x,t; x_0, t_0) = a(x_0, t_0) \frac{\partial}{\partial t_0} [f(x,t; x_0, t_0)] + \frac{1}{2} b(x_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial^2 t_0} [f(x,t; x_0, t_0)] \tag{2.66}$$

уравнениям Колмогорова. Здесь для плотности перехода введено обозначение $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1}) = f(x_m, t_m; x_{m-1}, t_{m-1})$.

Коэффициенты $a(x,t) = K_1(x,t)$ и $b(x,t) = K_2(x,t)$ называются соответственно *коэффициентом сноса* и *коэффициентом диффузии*. Коэффициент сноса $a(x,t)$ характеризует, как следует из (2.64), среднее значение локальной скорости изменения процесса $\xi(t)$, а коэффициент диффузии $b(x,t)$ - локальную скорость изменения дисперсии процесса. Зная $a(x,t)$ и $b(x,t)$, можно найти $f(x,t; x_0, t_0)$ и воспользоваться методом условных вероятностей для моделирования случайного диффузионного процесса. Однако даже для диффузионного процесса определить плотность перехода путем решения прямого или обратного уравнений Колмогорова бывает весьма сложно. Поэтому используют другой метод – метод формирующего фильтра.

Из теории марковских процессов известно, что при возбуждении нелинейного нестационарного фильтра, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)n(t) \tag{2.67}$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ детерминированные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов; $n(t)$ и $x(t)$ сигналы на входе и выходе, выходной сигнал $x(t)$ будет диффузионным процессом, если $n(t)$ - процесс типа белого шума. При этом оказывается, что функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$ связаны с

коэффициентами сноса $a(x,t)$ и диффузии $b(x,t)$ следующими соотношениями

$$f(x,t) = a(x,t), g(x,t) = \sqrt{\frac{2}{N_0} b(x,t)} \quad (2.68)$$

где $N_0/2$ - СПМ $n(t)$.

Отметим, что связь функций $f(x,t)$ и $g(x,t)$ с коэффициентами $a(x,t)$ и $b(x,t)$, выраженная соотношениями (2.68), справедлива, если дифференциальное уравнение (2.67) понимается в смысле Ито. Если уравнение (2.67) понимается в смысле Стратоновича, то связь между функциями $f(x,t)$, $g(x,t)$, $a(x,t)$ и $b(x,t)$ будет иметь вид

$$f(x,t) = a(x,t) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} b(x,t), g(x,t) = \sqrt{\frac{2}{N_0} b(x,t)} \quad (2.69)$$

Подробнее о свойствах стохастических дифференциальных уравнений можно узнать из книги В. И. Тихонова, В. Н. Харисова «Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем», учебн. пособие для вузов.- М.: Радио и связь, 1991. Для моделирования уравнения (2.67) на ЭВМ необходимо перейти к дискретному времени

$$x[m] - x[m-1] = Tf(x[m-1], (m-1)T) + Tg(x[m-1], (m-1)T)n[m], m = 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

где T - период дискретизации, $n[m]$ - дискретный белый гауссовский шум

$$n[m] = \frac{1}{T} \int_{t_m}^{t_m+T} n(t) dt \quad (2.71)$$

с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $N_0/2T$. Процесс (2.70) по сути является решением дифференциального уравнения (2.67) методом Эйлера, понимаемого в смысле Ито. При симметризованном уравнении (2.67) (уравнение Стратоновича) для решения следует использовать метод Рунге-Кутты. Описание методов Эйлера и Рунге-Кутты будет дано в главе 3.

2.3.3. Моделирование стационарных негауссовских процессов

В тех случаях, когда необходимо смоделировать стационарный негауссовский процесс, используют способ, который заключается в пропускании белого шума через линейный формирующий фильтр и нелинейное безынерционное звено (рис. 2.9)

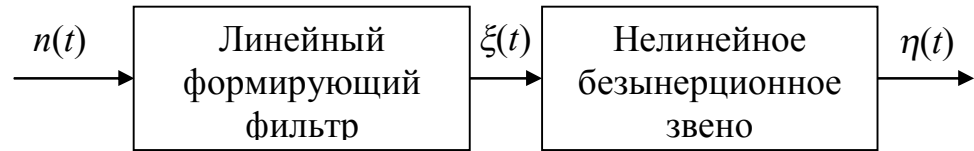


Рис. 2.9

При этом для решения задачи достаточно задать одномерную плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$ моделируемого случайного процесса $\eta(t)$ и его корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$. Поскольку в общем случае одним и тем же функциям $f_\eta(y)$ и $R_\eta(\tau)$ может соответствовать бесконечное множество случайных процессов, отличающихся друг от друга многомерными плотностями распределения, то используемый метод, позволяющий создать выборку отсчетов с необходимыми свойствами, является приближенным.

Рассматриваемая задача решается в два этапа, сначала ищется вид нелинейности безынерционного звена, а затем находят частотную характеристику линейного формирующего фильтра.

Определим вид нелинейности. Поскольку белый шум подается сначала на линейный фильтр, процесс $\xi(t)$ будет гауссовским. Без потери общности можно считать, что его математическое ожидание равно нулю, а дисперсия – единице, т.е. процесс $\xi(t)$ - стандартный гауссовский, и его одномерная плотность распределения равна

$$f_\xi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, |x| < \infty \quad (2.72)$$

Допустим, что входной и выходной сигналы нелинейного безынерционного звена связаны функциональной зависимостью

$$\eta(t) = g(\xi(t)) \quad (2.73)$$

где $g(x)$ - некоторая функция, которую необходимо найти. Рассмотрим интегральную функцию распределения вероятностей процесса $\eta(t)$

$$F_\eta(y) = \Pr\{\eta < y\} = \Pr\{g(\xi) < y\}$$

Допустим, что $g(x)$ - неубывающая функция. Тогда для нее существует обратная функция $g^{-1}(x)$ и последнее равенство может быть записано в виде

$$F_{\eta}(y) = \Pr\{\xi < g^{-1}(y)\} = F_{\xi}(g^{-1}(y)) \quad (2.74)$$

где $F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ - интегральная функция стандартного нормального распределения. Вводя новую переменную $y = g(x)$ и дифференцируя (2.74), получим

$$f_{\eta}(g(x))g'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.75)$$

Уравнение (2.75) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $y = g(x)$, которое может быть решено если не аналитически, то численно. Таким образом определяется вид нелинейности безинерционного звена.

Найдем коэффициент передачи формирующего фильтра. В соответствии с определением корреляционная функция процесса $\eta(t)$ равна

$$R_{\eta}(\tau) = \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \iint g(x_1)g(x_2)f_{\xi}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

где $f_{\xi}(x_1, x_2)$ - двухмерная плотность распределения отсчетов случайного процесса $\xi(t)$ в моменты времени t и $t+\tau$. Учитывая, что $\xi(t)$ - стандартный гауссовский процесс

$$R_{\eta}(\tau) = \iint \frac{g(x_1)g(x_2)}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2(1-r^2)}\right\} dx_1dx_2 \quad (2.75)$$

где $r = r(\tau)$ - коэффициент корреляции (нормированная корреляционная функция) процесса $\xi(t)$. Для определения коэффициента передачи формирующего фильтра необходимо, как это следует из материалов предыдущих разделов, найти коэффициент корреляции $r(\tau)$, если не аналитически, то численно. Для этого выбирается момент τ , вычисляется $R_{\eta}(\tau)$ и ищется такое число r , которое удовлетворяет (2.75). В итоге получается последовательность значений $r(\tau)$ в заранее выбранных точках.

Процедуру нахождения $r(\tau)$ можно облегчить, если представить $f_{\xi}(x_1, x_2)$ в виде обратного преобразования Фурье от характеристической функции двумерного нормального распределения

$$f_{\xi}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-0,5(q_1^2 + 2rq_1q_2 + q_2^2)} e^{i(x_1q_1 + x_2q_2)} dq_1 dq_2 \quad (2.76)$$

Подставляя (2.76) в (2.75) и раскладывая $e^{-rq_1q_2}$ в ряд Тейлора, получим

$$R_{\eta}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r)^k}{k!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^k G(q) e^{-0,5q^2} dq \right]^2 \quad (2.77)$$

где $G(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iqx} dx$ - преобразование Фурье функции $g(x)$. С

увеличением k , коэффициент $\frac{(-r)^k}{k!}$ убывает очень быстро. Поэтому, заменяя бесконечный ряд в (2.77) конечной суммой, получим уравнение

$$\sum_{k=0}^K c_k r^k(\tau) = R_{\eta}(\tau) \quad (2.78)$$

где $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^k G(q) e^{-0,5q^2} dq \right]^2$ независящие от $r(\tau)$ коэффициенты,

которые могут быть вычислены заранее после того, как найдена нелинейная функция $g(x)$. При фиксированном τ (2.78) является алгебраическим уравнением K -го порядка относительно неизвестного $r(\tau)$. Численные методы решения таких уравнений хорошо известны. Поэтому решить (2.78) и найти функцию $r(\tau)$ не представляет труда. После нахождения $r(\tau)$ можно воспользоваться рассмотренными методами генерации гауссовских случайных процессов и получить выборку отсчетов случайного процесса $\xi(t)$ нужной длины. После этого искомая выборка отсчетов процесса $\eta(t)$ получается как результат нелинейного преобразования отсчетов $\xi(t)$ в соответствии с (2.73).

3. Моделирование процессов преобразования сигналов и помех линейными и нелинейными звеньями

Любое преобразующее радиосигнал устройство может быть представлено в виде совокупности линейных и нелинейных звеньев. Формально различие между этими двумя категориями заключается в типе дифференциальных уравнений, описывающих связь входных и выходных сигналов: для первой категории эти уравнения линейные, а для второй – нелинейные. Неформально различие между ними проявляется при анализе реакции системы на входное воздействие, которое может быть представлено в виде суммы (суперпозиции) сигналов

$$x(t) = \sum_k x_k(t) \quad (3.1)$$

Для линейных систем реакция $y(t)$ на воздействие $x(t)$ является суммой реакций на каждый из сигналов $x_k(t)$

$$y(t) = \sum_k y_k(t) \quad (3.2)$$

где $y_k(t)$ - реакция системы на сигнал $x_k(t)$.

Таким образом, для линейной системы выполняется принцип суперпозиции. Для нелинейной системы (3.2) не выполняется, а, следовательно, не справедлив и принцип суперпозиции. В связи со значительной разницей физических свойств линейных и нелинейных звеньев при их моделировании используются различные методы.

3.1. Моделирование линейных звеньев

Пусть линейное звено (ЛЗ) описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_M y^{(M)}(t) + a_{M-1} y^{(M-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_N x^{(N)}(t) + b_{N-1} x^{(N-1)}(t) + \dots + b_0 x(t)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - входной и выходной сигналы.

Допустим, что на вход подается гармонический сигнал $x(t) = e^{i\omega t}$. Из теории электрических цепей известно, что сигнал на выходе системы через некоторое время, равное интервалу затухания переходных процессов, тоже будет иметь вид гармонического сигнала, но с отличной от входного ампли-

тудой и фазой - $y(t) = Ae^{i\omega t}$. Подставляя выражения для $x(t)$ и $y(t)$ в (3.3), получим

$$A = \frac{b_N(i\omega)^N + b_{N-1}(i\omega)^{N-1} + \dots + b_0}{a_M(i\omega)^M + a_{M-1}(i\omega)^{M-1} + \dots + a_0}$$

Амплитуда A является комплексной функцией только частоты ω . Поскольку при гармоническом сигнале на входе выполняется равенство $y(t) = Ax(t)$, то A может рассматриваться как коэффициент передачи звена. Тогда, вводя переменную $s = i\omega$, для коэффициента передачи ЛЗ получим

$$H(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_0}{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \dots + a_0} \quad (3.4)$$

Функция $H(s)$ полностью характеризует ЛЗ. В частности частотная характеристика ЛЗ равна $H(i\omega)$, а импульсная характеристика может быть получена как обратное преобразование Фурье от $H(i\omega)$ или обратное преобразование Лапласа от $H(s)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(s) e^{st} ds \quad (3.5)$$

причем контур интегрирования во втором интеграле, представляющий собой параллельную мнимой оси прямую на комплексной плоскости переменной s , выбором σ смещается так, чтобы все особенности функции $H(s)$ были расположены слева от него.

Существует и обратная связь, позволяющая по импульсной характеристике определить коэффициент передачи или частотную характеристику ЛЗ

$$H(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt, \quad H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (3.6)$$

При записи (3.6) предполагается, что $h(t) = 0$ при $t < 0$, т.е. ЛЗ является реализуемым (удовлетворяет принципу причинности). Можно показать, что необходимым условием для реализуемости ЛЗ является расположение всех особых точек функции $H(s)$, а такими в соответствии с (3.4) могут быть только полюсы, слева от мнимой оси комплексной плоскости переменной s .

При цифровом моделировании ЛЗ его входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы представляются в виде решетчатых функций $x[n]$ и $y[n]$, которые

отличны от нуля для дискретных моментов времени $nT, n = 0, 1, 2, \dots$, где T - период дискретизации. Точное равенство входных $x[n] = x(nT)$ и выходных сигналов $y[n] = y(nT)$ ЛЗ и его цифровой модели не достижимо. На практике возможно лишь приближенное равенство $y[n] \approx y(nT)$. Задачей синтеза цифровой модели является нахождение такого алгоритма вычисления $y[n]$ по $x[n]$, при котором это приближенное равенство выполняется как можно точнее. В такой постановке задача моделирования ЛЗ ничем не отличается от задачи синтеза цифрового фильтра (ЦФ) по его аналоговому прототипу. При этом само ЛЗ будет эквивалентно фильтру аналоговому (прототипу), а его цифровая модель – фильтру цифровому. Рассмотрим некоторые методы составления цифровых моделей линейных звеньев.

3.1.1. Метод инвариантности импульсной характеристики

При синтезе модели этим методом обеспечивается равенство импульсных характеристик аналогового фильтра и цифрового фильтра

$$h[n] = h(n\Delta t), n = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

Передаточная функция ЦФ при этом равна z -преобразованию от импульсной характеристики

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (3.8)$$

Допустим, что аналоговый фильтр имеет передаточную функцию вида

$$H(s) = H_0 \frac{(s - S_1)(s - S_2) \cdots (s - S_M)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)} \quad (3.9)$$

где $S_m, m = \overline{1, M}$ и $s_n, n = \overline{1, N}$ – нули и полюсы передаточной характеристики. Импульсная характеристика аналогового фильтра однозначно определяется как преобразование Лапласа функции $H(s)$, и в случае, когда полюсы $s_n, n = \overline{1, N}$ простые, равна

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \quad (3.10)$$

где $A_k = H(s)(s - s_k) \Big|_{s=s_k}$; $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$. Тогда на основании (3.7)) импульсная характеристика ЦФ равна

$$h[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k T n} \quad (3.11)$$

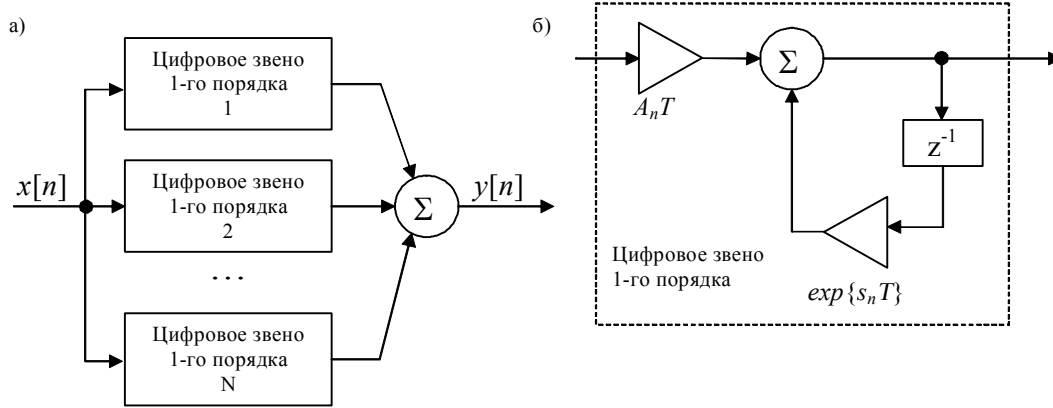


Рис. 3.1

Подставляя (3.11) в (3.8), получим коэффициент передачи ЦФ

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (3.12)$$

Учитывая, что умножение Z -преобразования цифрового сигнала на z^{-1} эквивалентно задержке сигнала на период дискретизации T , получим схему реализации фильтра в виде N параллельно включенных цифровых звеньев первого порядка (см. рис. 3.1).

Докажем, что рассматриваемый метод дает устойчивый реализуемый цифровой фильтр. Для доказательства устойчивости обратимся к (3.11). Поскольку $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$, то экспоненциальные члены $e^{s_k T n}$ при увеличении n будут убывать, и $h[n] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, получающийся в результате использования метода инвариантности импульсной характеристики ЦФ будет устойчив. Рассмотрим теперь вопрос о реализуемости. Из теории цифровых фильтров известно, что для реализуемости необходимо, чтобы полюсы коэффициента передачи ЦФ лежали внутри круга единичного радиуса на плоскости переменной z . Из (3.12) следует, что коэффициент передачи $H(z)$ синтезируемого фильтра имеет N полюсов $z_k = e^{s_k T}, k = \overline{1, N}$. В силу того, что $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$, получаем $|z_k| = e^{\text{Re}\{s_k\}T} < 1, k = \overline{1, N}$, Следовательно,

все полюсы фильтра лежат внутри круга единичного радиуса, и синтезируемый фильтр реализуем.

Рассмотренный метод не может быть использован, когда коэффициент передачи аналогового фильтра $H(s)$ не имеет полюсов ($N = 0$) или когда число полюсов меньше числа нулей ($N < M$).

3.1.2. Метод билинейного преобразования

Пусть коэффициент передачи аналогового фильтра задан в виде

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0} \quad (3.13)$$

причем $N \geq M$. Без потери общности можно считать, что $a_N = 1$. Разделим числитель и знаменатель (3.13) на s^N . В результате получим

$$H(s) = \frac{b_M (1/s)^{N-M} + b_{M-1} (1/s)^{M-N-1} + \dots + b_0 (1/s)^N}{1 + a_{N-1} (1/s) + \dots + a_0 (1/s)^N} \quad (3.14)$$

Фильтр с коэффициентом передачи (14) может быть реализован по схеме, представленной на рис.

3.2а.

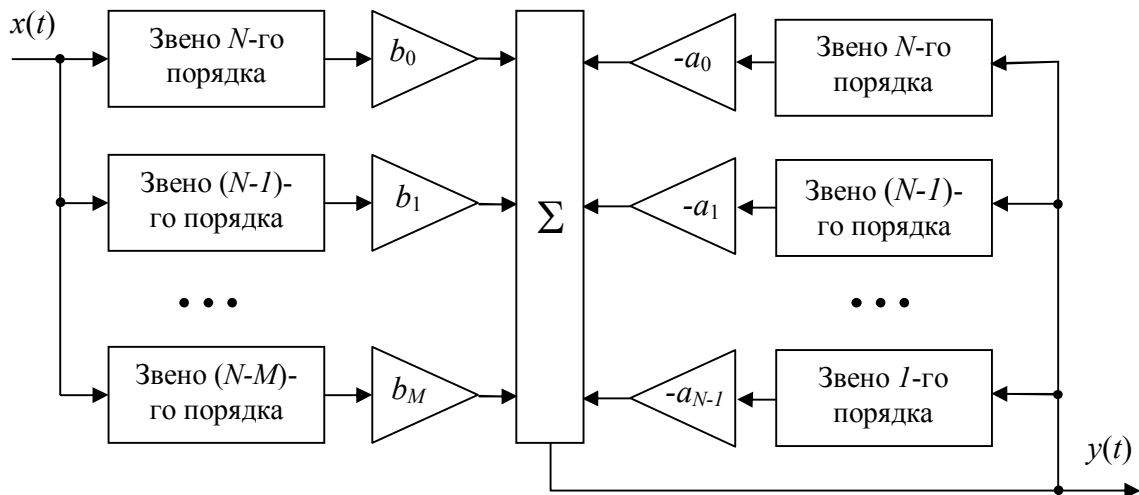


Рис. 3.2

Основным элементом структурной схемы на рис. 3.2 является звено n -го порядка с коэффициентом передачи $H_n(s) = 1/s^n$, которое представляет собой последовательное соединение n интеграторов (рис. 3.3).

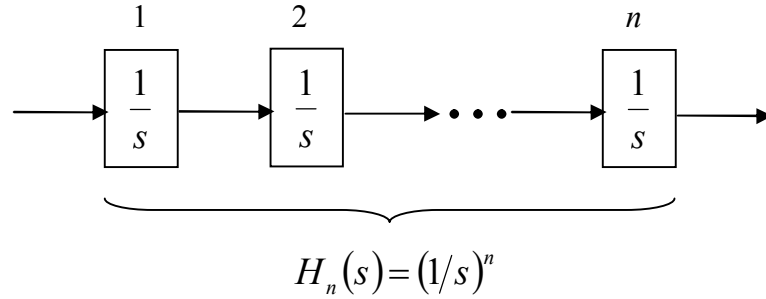


Рис. 3.3

Следовательно, базовым элементом для реализации аналогового фильтра (3.14) является интегратор – звено с коэффициентом передачи $H_1(s) = 1/s$. Поэтому при цифровом моделировании фильтра за базовый элемент может быть взят цифровой аналог интегратора.

При построении цифрового интегратора может быть использована рекуррентная процедура, реализующая один из наиболее точных методов численного интегрирования – *метод трапеций*. В соответствии с этим методом интеграл от некоторой функции $f(t)$ на интервале $[t_0, t_n]$ вычисляется на основании следующего соотношения

$$g(t_n) = \int_{t_0}^{t_n} f(t) dt \approx T \left[\frac{f(t_0) + f(t_1)}{2} + \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2} + \dots + \frac{f(t_{n-1}) + f(t_n)}{2} \right] \quad (3.15)$$

где $t_k = t_0 + kT$, $k = \overline{0, n-1}$ – n равномерно распределенных на интервале $[t_0, t_n]$ узлов интегрирования.

Пусть на вход интегрирующего звена подается процесс $f(t)$. Тогда на основании (3.15) сигналы на выходе цифрового интегратора в моменты t_n и t_{n+1} связаны следующим рекуррентным соотношением

$$g[n+1] = g[n] + \frac{T}{2} \{ f[n] + f[n+1] \} \quad (3.16)$$

Взяв Z -преобразование от (3.16), получим

$$zG(z) = G(z) + \frac{T}{2} \{ F(z) + zF(z) \}$$

Тогда коэффициент передачи цифрового интегратора равен

$$H_1(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.17)$$

Следовательно, переменной s в выражении для коэффициента передачи аналогового фильтра может быть поставлено в соответствие следующее выражение

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.18)$$

при записи коэффициента передачи ЦФ. Преобразование (3.18) в теории функций комплексной переменной называется *билинейным*. Отсюда следует и название метода. Особенность билинейного преобразования заключается в том, что левая полуплоскость переменной s отображается во внутренность окружности единичного радиуса в плоскости переменной z . Поэтому, если аналоговый фильтр с коэффициентом передачи $H(s)$ имел полюсы в левой полуплоскости переменной s (т.е. был устойчив и реализуем), то эти полюсы преобразованием (3.18) будут отображены во внутренность окружности единичного радиуса в плоскости переменной z . Следовательно, метод билинейного преобразования позволяет получить устойчивые и реализуемые цифровые фильтры, если этими свойствами обладали их аналоговые прототипы.

Применение метода билинейного преобразования для синтеза (моделирования) ЦФ приводит к явлению *деформации шкалы частот*. Суть данного явления в следующем. Пусть ω и Ω - круговые частоты при записи частотных характеристик аналоговых и соответствующих им цифровых фильтров. Учитывая, что $s = i\omega$ и $z = e^{i\Omega}$, получим следующую связь ω и Ω

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \quad (3.19)$$

При малых Ω в силу того, что $\operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \approx \frac{\Omega}{2}$, $\Omega \approx \omega T$. Следовательно, при $\Omega \ll 1$ аналоговый и цифровой фильтры будут иметь примерно одинаковые амплитудно-частотные характеристики. Однако для более высоких частот соотношение между ω и Ω становится нелинейным, т.е. происходит деформация шкалы частот (рис. 3.4).

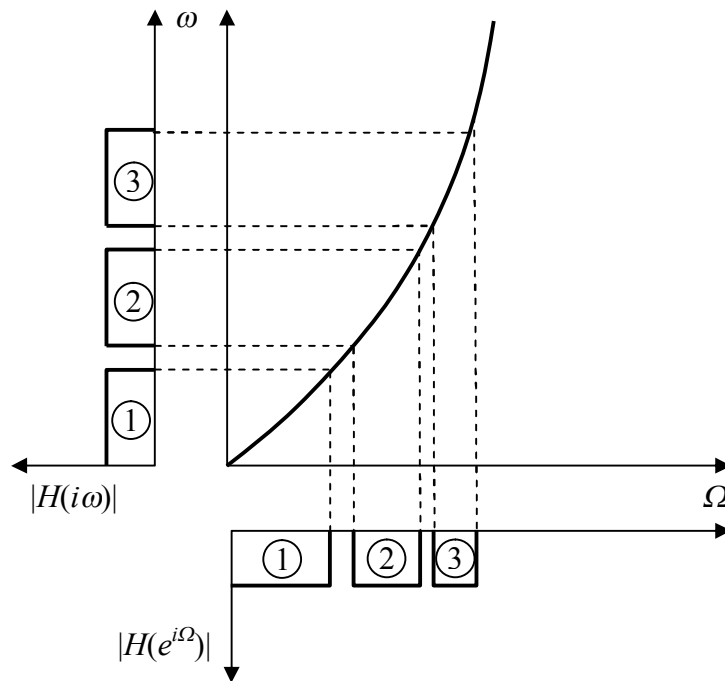


Рис. 3.4

Влияние этой деформации можно проиллюстрировать на примере моделирования аналогового фильтра, АЧХ которого имеет три одинаковые по ширине полосы пропускания 1, 2 и 3. Синтезированный ЦФ также будет иметь три полосы. Однако ширины полос пропускания будут в силу деформации шкалы частот разными, как показано на рис. 3.4. Явление деформации шкалы частот на АЧХ ЦФ может быть скомпенсировано введением предискажений в АЧХ прототипа, которые заключаются в растяжении шкалы частот по закону

$$\omega' = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (3.20)$$

где ω' - деформированная частота для аналогового фильтра.

Метод билинейного преобразования гарантирует хорошее совпадение частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi/4T$. При $|\omega| > \pi/4T$ частотные характеристики фильтров, как правило, значительно различаются.

3.1.3. Метод замены дифференциалов

Будем считать, что в (3.13) $a_0 = 1$. Тогда прямая реализация аналогового фильтра по его коэффициенту передачи $H(\omega)$ возможна, если будет реализована структурная схема, представленная на рис. 3.5.

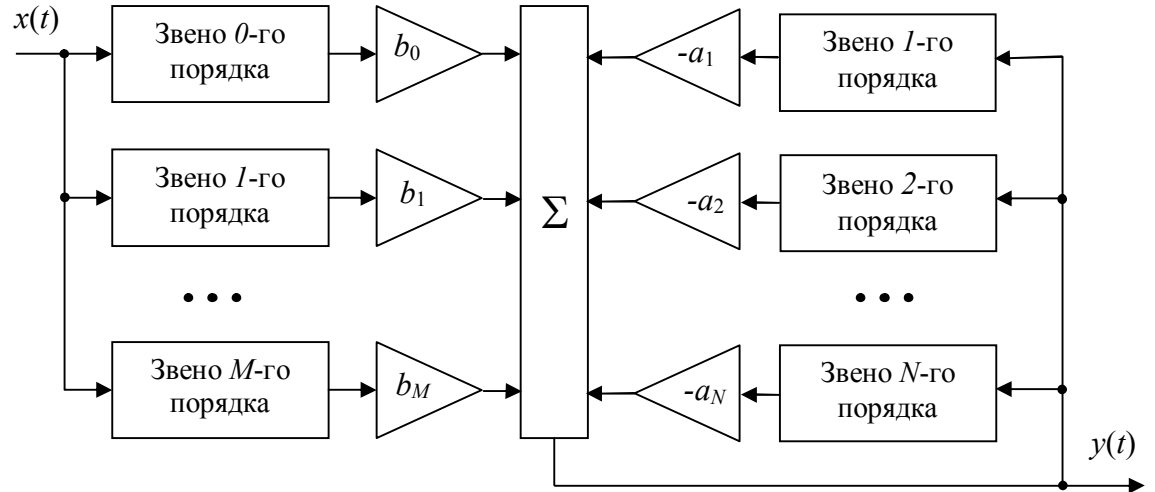


Рис. 3.5

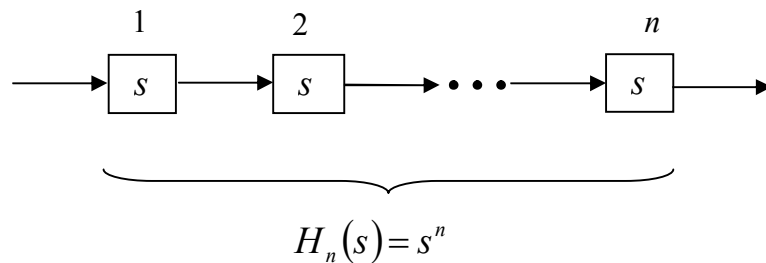


Рис. 3.6

Основное отличие этой схемы от схемы на рис. 3.3 заключается в том, что ее звенья построены на основе каскадного включения дифференциаторов (рис. 3.6). Поэтому базовым элементом для построения модели ЦФ может быть взят дифференциатор с коэффициентом передачи $H_1(s) = s$. Определим коэффициент передачи цифрового аналога дифференцирующего звена. За основу могут быть взяты формулы численного дифференцирования

$$g(t_n) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_n} = \begin{cases} \frac{f(t_n) - f(t_n - T)}{T}, & \text{нисходящая разность} \\ \frac{f(t_n + T) - f(t_n)}{T}, & \text{восходящая разность} \end{cases} \quad (3.21)$$

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе, возьмем Z -преобразование от обеих частей уравнения (3.21). В результате получим коэффициенты передачи цифровых дифференциаторов, построенных соответственно на основе нисходящих и восходящих разностей

$$H_1(z) = \begin{cases} \frac{1 - z^{-1}}{T}, & \text{нисходящая разность} \\ \frac{z - 1}{T}, & \text{восходящая разность} \end{cases} \quad (3.22)$$

Следовательно, при синтезе цифрового фильтра возможны две замены

$$s_{\nabla} = \frac{1 - z^{-1}}{T} \text{ и } s_{\Delta} = \frac{z - 1}{T} \quad (3.23)$$

Несложно показать, что замена, полученная методом нисходящих разностей, отображает левую полуплоскость переменной s во внутренность окружности радиуса $1/2$ с центром в точке $1/2$ (рис. 3.7 а), которая является частью единичного круга на плоскости переменной z . Следовательно, при использовании замены переменных

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (3.24)$$

получаются устойчивые и реализуемые цифровые фильтры.

В то же время преобразование, полученное методом восходящих разностей, отображает левую полуплоскость переменной s в полуплоскость, лежащую ниже прямой $y = x - 1$, где $x = \operatorname{Re}(z)$ и $y = \operatorname{Im}(z)$ (рис. 3.7 б). Поэтому полюсы устойчивого и реализуемого аналогового фильтра при таком преобразовании могут попасть в область за пределами единичной окружности. В результате синтезируемый фильтр будет нереализуемым. Следовательно, для рассматриваемого метода синтеза цифровых фильтров следует использовать только замену (3.24).

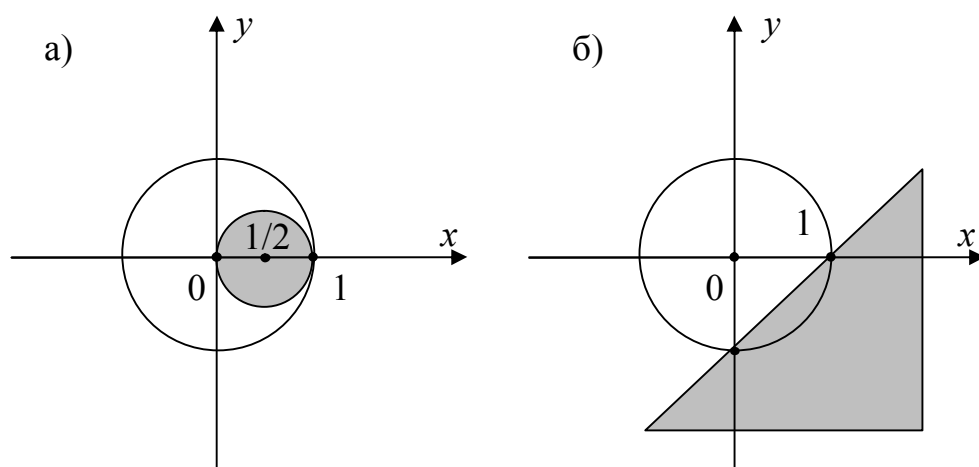


Рис. 3.7

Метод замены дифференциалов применим в ситуациях, когда метод инвариантности импульсной характеристики не используется. В то же время, метод может дать значительную разницу в частотных характеристиках фильтров, если нули коэффициента передачи аналогового фильтра $H(s)$ имеют действительную часть, превышающую по величине $1/2T$. Кроме того, метод не всегда гарантирует близкое совпадение характеристик аналогового и цифрового фильтра, когда $H(s)$ не имеет нулей ($M = 0$).

3.1.4. Расчет КИХ фильтров

В предыдущих разделах рассматривались методы цифрового моделирования аналоговых фильтров. В результате использования изложенных способов получаются цифровые фильтры, имеющие рекурсивную структуру и бесконечную по длительности импульсную характеристику. В силу последнего в теории цифровых фильтров подобные устройства получили название БИХ фильтров (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой). Эти фильтры, как было показано, наследуют от своих аналоговых прототипов такие свойства как устойчивость и реализуемость. Однако БИХ фильтры имеют и ряд недостатков. Оказывается, что при высоких порядках ошибки округления, неизбежно возникающие при вычислении коэффициентов БИХ фильтра, могут привести к его неустойчивости. Кроме того, БИХ фильтры обеспечивают хорошую аппроксимацию амплитудной характеристики аналогового прототипа при нелинейной фазовой характеристике. Последнее обстоятельство в некоторых случаях является нежелательным. Избавиться от этих недостатков позволяют КИХ фильтры, т.е. фильтры с конечной импульсной характеристикой. Эти фильтры всегда устойчивы и имеют линейную фазочастотную характеристику, если импульсная характеристика симметрична или антисимметрична относительно своей середины.

Синтез КИХ фильтров производится следующим образом. Пусть $H_d(z)$ - коэффициент передачи БИХ фильтра с импульсной характеристикой $h_d[n]$, $n = 0, 1, \dots$. Положим импульсную характеристику КИХ фильтра равной

$$h[n] = w[n]h_d[n], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.25)$$

где

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.26)$$

Дискретная функция $w[n]$ называется *прямоугольным окном*. На основании свойств дискретного преобразования Фурье амплитудно-частотная характеристика КИХ фильтра равна свертке АЧХ БИХ фильтра и АЧХ окна

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{i\nu}) W(e^{i(\Omega-\nu)}) d\nu \quad (3.27)$$

Несложно показать, что АЧХ прямоугольного окна равна

$$W(e^{i\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-in\Omega} = e^{-i\frac{N-1}{2}\Omega} \frac{\sin \frac{N\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} \quad (3.28)$$

График модуля функции $W(e^{i\Omega})$ представлен на рис. 3.8.

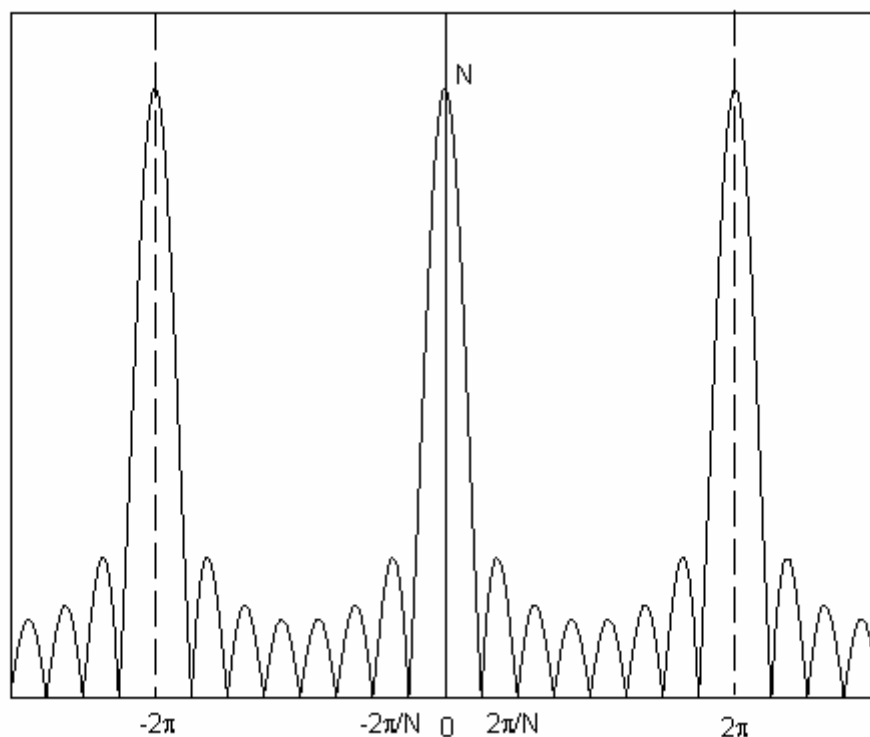


Рис. 3.8

Эта функция имеет следующие особенности:

1. $|W(e^{i\Omega})|$ - периодическая функция с периодом 2π ;
2. График $|W(e^{i\Omega})|$ имеет вид периодически повторяющихся лепестков, максимальное значение которых равно N , а ширина по первым нулям - $4\pi/N$;
3. Между главными лепестками находятся боковые, ширина которых равна $2\pi/N$;
4. Максимальный уровень N имеет первый боковой лепесток, относительный уровень которого равен -13 дБ;
5. С увеличением N отношение площадей в главном лепестке и первом боковом остается постоянным.

Рассмотрим, к каким последствиям приводят названные свойства на примере синтеза фильтра нижних частот, АЧХ которого $H_d(e^{i\Omega})$ представлена на рис. 3.9 а. Результат свертки функции $H_d(e^{i\Omega})$ и $W(e^{i\Omega})$ представлен на рис. 3.9 б.

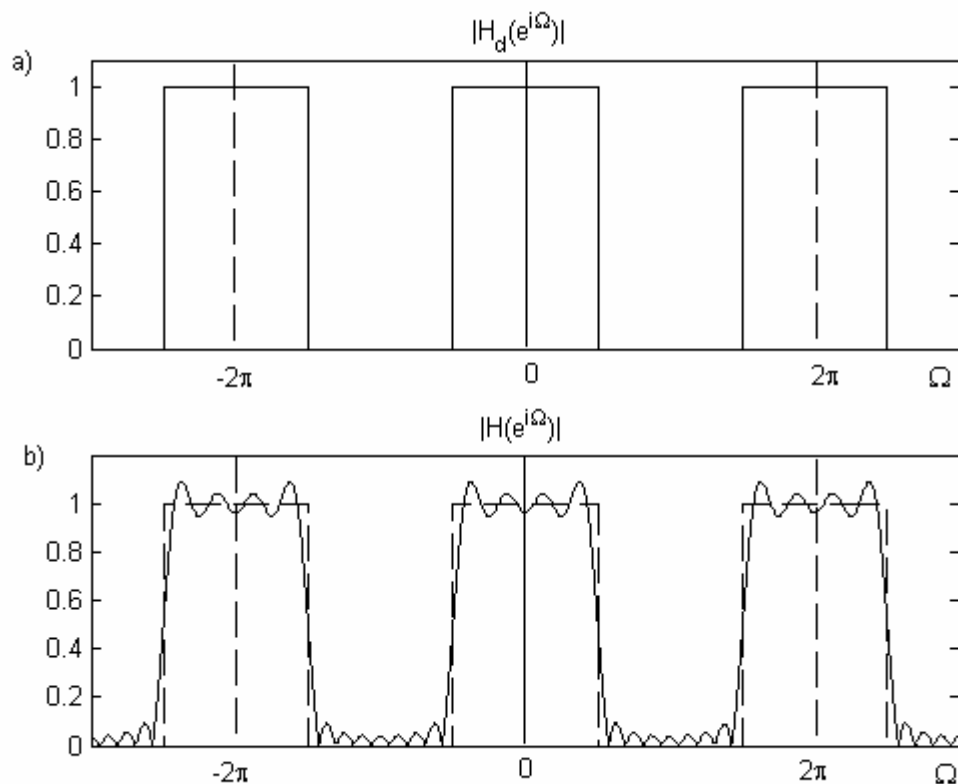


Рис. 3.9

Из рисунка видно, что АЧХ КИХ фильтра имеет пульсирующий характер как в полосе пропускания, так и в полосе заграждения. Причем амплитуда пульсаций АЧХ возрастает по мере приближения к границе полосы пропускания. Другой особенностью АЧХ КИХ фильтра является появление переходной области между полосами пропускания и заграждения, где АЧХ меняется сравнительно медленно. Анализ показывает, что при увеличении количества отсчетов N в импульсной характеристике КИХ фильтра (ширины прямоугольного окна) крутизна АЧХ в переходной полосе увеличивается, Однако при этом уровень пульсаций АЧХ в полосах пропускания и заграждения практически остается постоянным, хотя частота самих пульсаций увеличивается. Это явление получило название *эффекта Гиббса*, названного так по имени математика впервые исследовавшего вопросы сходимости рядов Фурье.

Для уменьшения эффекта Гиббса используют другие, отличные от прямоугольного, весовые окна:

1. Окно Барлетта (треугольное окно)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (3.29)$$

2. Окно Ханна

$$w[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right], 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.30)$$

3. Окно Хэмминга

$$w[n] = 0,54 - 0,46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.31)$$

4. Окно Блэкмана

$$w[n] = 0,42 - 0,5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0,08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.32)$$

5. Окно Кайзера

$$w[n] = \frac{I_0 \left(\alpha \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1} \right)^2} \right)}{I_0(\alpha)}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.33)$$

где $I_0(\cdot)$ - функция Бесселя мнимого аргумента, α - постоянный коэффициент, $4 \leq \alpha \leq 9$. Изменение α позволяет влиять на уровень боковых лепестков.

Значения уровня первого бокового лепестка и ширины главного лепестка по половинному уровню сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Окно	Амплитуда первого бокового лепестка, дБ	Ширина главного лепестка
Прямоугольное	- 13	$2\pi/N$
Барлетта	- 25	$4\pi/N$
Ханна	- 31	$4\pi/N$
Хэмминга	- 41	$4\pi/N$
Блэкмана	- 57	$6\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 4$)	- 30	$4\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 6$)	- 45	$4\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 9$)	- 67	$6\pi/N$

3.2. Моделирование нелинейных систем

В зависимости от сложности математического моделирования различают три типа нелинейных звеньев:

- Безынерционные нелинейные звенья;
- Инерционные замкнутые нелинейные звенья;
- Звенья, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

3.2.1. Моделирование безынерционных нелинейных звеньев

Пусть задано звено, в котором производится нелинейное функциональное преобразование входного сигнала $x(t)$

$$y(t) = g(x(t)) \quad (3.34)$$

где $g(\cdot)$ - некоторая функция, Поскольку выходной сигнал $y(t)$ в момент времени t определяется только значением $x(t)$ в тот же момент времени и не зависит от предыдущих значений входного сигнала, такое звено называется безынерционным. Цифровой моделью сигнала на выходе будет

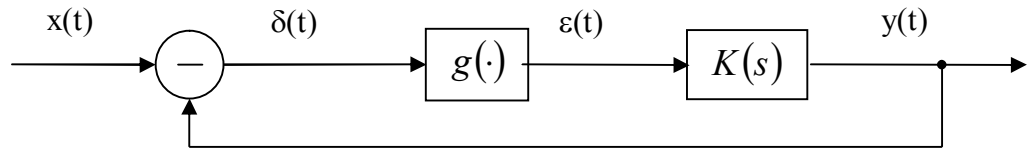
$$y[n] = g(x[n]) \quad (3.35)$$

где $x[n]$ - модель входного сигнала. При этом, однако, следует помнить, что нелинейное преобразование сигналов приводит к изменению ширины спектра сигнала на выходе по сравнению с шириной спектра сигнала на входе. Как правило, это изменение происходит в сторону увеличения ширины спектра. Поэтому при наличии в радиотехнической системе нелинейных звеньев необходимо так выбирать частоту дискретизации сигналов, чтобы отмеченное увеличение ширины спектра не нарушало условий Котельникова – Найквиста.

3.2.2. Моделирование замкнутых инерционных нелинейных звеньев

Замкнутым инерционным нелинейным звеном называется система слежения, содержащая нелинейные безынерционные звенья. Типичная структурная схема подобной системы приведена на рис. 3.10 а.

а)



б)

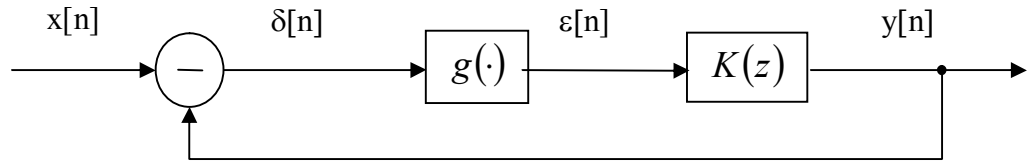


Рис. 3.10

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ - входной и выходной процессы. Основной задачей звена является поддержание примерного равенства $x(t)$ и $y(t)$. В состав звена входит нелинейное безынерционное звено, характеризуемое функциональным преобразованием $g(\cdot)$, а также линейное звено с коэффициентом передачи $K(s)$. В состав линейного звена должно входить одно или несколько интегрирующих звеньев, необходимых для придания всей замкнутой системе нужного порядка астатизма.

Допустим, что цифровым аналогом системы на рис. 3.10а будет дискретная система, структурная схема которой приведена на рис. 3.10б. Здесь $K(z)$ - коэффициент передачи ЦФ, прототипом которого является аналоговый фильтр с коэффициентом передачи $K(s)$.

Запишем сигналы в характерных точках схемы

$$\begin{aligned}\delta[n] &= x[n] - y[n] \\ \varepsilon[n] &= g(\delta[n]) = g(x[n] - y[n]) \\ a_N y[n - N] + \dots + a_0 y[n] &= b_M \varepsilon[n - M] + \dots + b_0 \varepsilon[n]\end{aligned}\tag{3.36}$$

где $a_N, \dots, a_0, b_M, \dots, b_0$ - коэффициенты разностного уравнения ЦФ,

Поскольку основной задачей при моделировании является вычисление текущего значения выходного процесса $y[n]$, сгруппируем в левой части последнего уравнения системы (3.36) все сигналы, зависящие от $y[n]$, а в правой – сигналы, значения которых на момент дискретного времени n известны

$$a_0 y[n] - b_0 g(x[n] - y[n]) = b_M \varepsilon[n - M] + \dots + b_0 \varepsilon[n] - a_N y[n - N] - \dots - a_1 y[n - 1] \quad (3.37)$$

Анализ (3.37) показывает, что на n -м шаге моделирования для определения текущего значения выходного процесса $y[n]$ требуется решить нелинейное относительно неизвестного уравнение вида

$$a_0 y[n] - b_0 g(x[n] - y[n]) = \xi[n] \quad (3.38)$$

где $\xi[n]$ - известное значение. Поиск решения нелинейного уравнения (3.38)

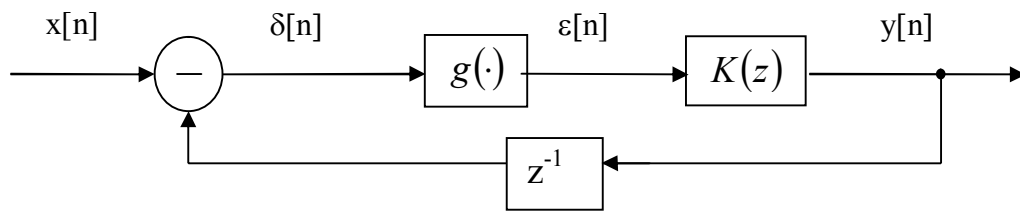


Рис. 3.11

на каждом шаге может значительно увеличить время моделирования. Поэтому необходимо найти способ избежать решения нелинейных уравнений типа (3.38). Такой способ достаточно очевиден: необходимо включить в цепь обратной связи элемент задержки на один такт, как это показано на рис. 3.11.

При этом уравнение для неизвестного выходного сигнала становится линейным

$$a_0 y[n] = \xi[n] + b_0 g(x[n - 1] - y[n - 1]) \quad (3.39)$$

и его решение не вызывает затруднений.

Необходимо отметить, что введение задержки на один такт в цепь обратной связи вносит дополнительную погрешность. Однако величина этой погрешности зависит от величины периода дискретизации, и уменьшение последнего позволяет сделать эту погрешность малой.

3.2.3. Системы, заданные нелинейными дифференциальными уравнениями

Рассматриваемый случай является наиболее сложным для математического моделирования нелинейных систем и сводится к численному решению дифференциальных уравнений, описывающих звено.

Пусть звено описывается следующим векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dY}{dt} = G(t, Y), Y(t_0) = Y_0 \quad (3.40)$$

где $Y(t) = \{y_m(t)\}_{m=1}^M$ - вектор переменных состояния звена, $G(\cdot)$ - векторная функция, t_0 - начальный момент времени, который без потери общности можно положить равным нулю, Y_0 - начальное значение. К виду (3.40) можно привести любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вкратце методы численного решения уравнений вида (3.40).

Метод Эйлера. Этот метод является исторически первым из предложенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть T - период дискретизации. Тогда, заменяя производную по времени на ее аппроксимацию через конечную разность, получим следующее рекуррентное уравнение

$$Y[n+1] = Y[n] + TG(nT, Y[n]), n = 0, 1, \dots \quad (3.41)$$

которое позволяет шаг за шагом находить значения выходного процесса не линейной системы. На рис. 3.12 приведена геометрическая интерпретация получения данным методом приближенного решения уравнения (3.40) для случая $M = 1$. Начальной точкой решения является заданное по условию задачи значение y_0 . На основании y_0 в начальный момент времени $t_0 = 0$ вычисляют значение $G(0, y_0)$, которое равно тангенсу угла наклона касательной к истинной интегральной кривой (штрихпунктирная линия) уравнения (3.40) в точке $t_0 = 0$. Точка пересечения этой касательной с вертикальной прямой, восстановленной из точки $t = T$, дает значение $y_1 = y[1]$. Затем, определив y_1 ,

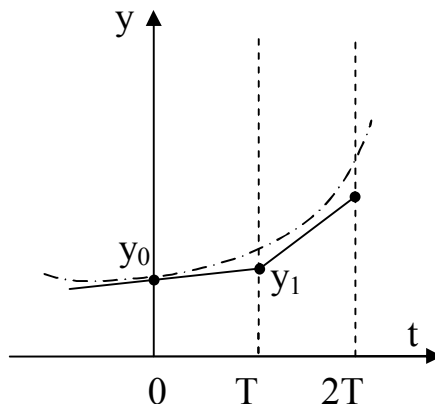


Рис. 3.12

из точки (T, y_1) проводят прямую с тангенсом угла наклона равным $G(T, y_1)$ до пересечения с вертикальной прямой, восстановленной из точки $t = 2T$. В результате вычисляют $y_2 = y[2]$. Повторяя эту процедуру, получают ломаную линию (*ломанную Эйлера*), которая является приближением к истинной интегральной кривой.

Понятно, что найденная линия в общем случае не будет совпадать с истинным решением. В теории дифференциальных уравнений показано, что ошибка полученного решения пропорциональна T^2 .

Модифицированный метод Эйлера. Рекуррентная процедура вычисления отсчета выходного процесса для данного метода имеет вид

$$Y[n+1] = Y[n] + \frac{T}{2} \{G(nT, Y[n]) + G((n+1)T, \tilde{Y}[n+1])\}, n = 0, 1, \dots \quad (3.42)$$

где $\tilde{Y}[n+1] = Y[n] + TG(nT, Y[n])$. Анализ (3.42) показывает, что тангенс угла наклона элемента ломанной Эйлера на текущем шаге определяется как среднее арифметическое тангенсов угла наклона ломанной Эйлера на текущем и следующем за ним шагах обыкновенного метода Эйлера. Такая процедура позволяет уменьшить ошибку вычислений и сделать ее пропорциональной T^3 .

Метод Рунге – Кутты. Данный метод является наиболее точным и используемым на практике среди одношаговых методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Правило вычисления значения очередного отсчета выходного процесса для метода Рунге – Кутты выглядит следующим образом

$$Y[n+1] = Y[n] + \frac{T}{6} \{K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3\}, n = 0, 1, \dots \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned} K_0 &= G(nT, Y[n]) \\ K_1 &= G\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T, Y[n] + \frac{1}{2}K_0\right) \\ K_2 &= G\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T, Y[n] + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 &= G((n+1)T, Y[n] + K_2) \end{aligned}$$

Используя этот метод, оказывается возможно сделать ошибку вычислений пропорциональной T^5 .

4. Обработка результатов математического моделирования

Как было отмечено во введении, особенностью радиотехнических систем является постоянное воздействие на них случайных факторов. Следовательно, результаты моделирования будут также носить случайный характер. Поэтому, принимая во внимание, что время эксперимента и объем полученных данных ограничены, необходимо так обрабатывать результаты, чтобы получаемые оценки наилучшим образом давали представление о свойствах и параметрах моделируемых устройств.

Поскольку, вследствие ограниченности полученных в ходе моделирования данных, можно говорить лишь об оценивании тех или иных свойств и параметров, необходимо определить какими качествами должны обладать эти оценки. Из теории статистического оценивания известно, что качество оценок определяется следующими показателями:

1. *Состоятельность*. Оценка \hat{x} называется *состоятельной*, если вероятность ее отклонения от истинного значения оцениваемого параметра x при увеличении размера выборки данных N стремится к нулю, т.е. выполняется следующее условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\{|\hat{x} - x| > \varepsilon\} = 0 \quad (4.1)$$

где ε - произвольное, положительное, сколь угодно малое число. Смысл условия (4.1) состоит в том, что для состоятельной оценки при увеличении объема наблюдений значения оценки все ближе и ближе группируются вокруг истинного значения параметра.

2. *Смещенность*. Смещением $b_{\hat{x}}$ оценки \hat{x} называется разность

$$b_{\hat{x}} = E\{\hat{x}\} - x \quad (4.2)$$

где $E\{\hat{x}\}$ - математическое ожидание оценки. Оценка называется *несмещенной*, если $b_{\hat{x}} = 0$. Это означает, что центр группирования значений несмещенной оценки совпадает с истинным значением оцениваемого параметра.

3. *Эффективность*. При достаточно общих предположениях оказывается, что дисперсия оценки \hat{x} при фиксированном значении размера выборки N не может быть меньше, чем некоторая величина D_0 , т.е.

$$D\{\hat{x}\} \geq D_0 \quad (4.3)$$

Условие (4.3) называется *неравенством Крамера – Рао*, а величина D_0 - соответственно *границей Крамера – Рао*. Граница D_0 может быть вычислена достаточно просто

$$D_0 = - \frac{\left(1 - \frac{\partial b_{\epsilon}}{\partial x}\right)^2}{E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(\mathbf{r}|x) \right\}} \quad (4.4)$$

где $L(\mathbf{r}|x)$ - логарифм функции правдоподобия наблюдаемой выборки $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$; $E\{\cdot\}$ - оператор вычисления математического ожидания. За меру *эффективности* оценки ϵ принимается величина

$$\epsilon = \frac{D_0}{D\{\epsilon\}} \quad (4.5)$$

В силу неравенства Крамера – Рао $0 \leq \epsilon \leq 1$. Оценка называется *эффективной*, если $\epsilon = 1$, т.е. ее дисперсия минимальна и равна границе Крамера – Рао.

При обработке результатов измерений следует стремиться к тому, чтобы использовать состоятельные, несмещенные и эффективные оценки, Это удастся далеко не всегда, Поэтому иногда вышеназванные требования смягчают, заменяя свойства несмещенности и эффективности соответствующими асимптотическими свойствами:

4. Асимптотической несмещенностью

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_{\epsilon} = 0 \quad (4.6)$$

5. Асимптотической эффективностью

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon = 1 \quad (4.7)$$

Рассмотрим теперь тот перечень задач, с которыми чаще всего встречается исследователь, осуществляющий обработку результатов измерений.

Обычно при обработке результатов машинного моделирования возникают следующие проблемы:

- определение эмпирического закона распределения вероятности оцениваемых в ходе эксперимента параметров;
- проверка совпадения эмпирического закона распределения вероятности с модельным распределением;

- оценка параметров распределения оцениваемого параметра.
- Рассмотрим, как решаются вышеназванные задачи.

4.1. Оценка закона распределения вероятностей

Пусть в результате эксперимента для оцениваемого параметра x получен ряд оценок $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$. Этот ряд называется выборкой объема (размера) N . Существуют два способа оценки эмпирического распределения вероятности оценки: оценка плотности распределения и оценка функции распределения.

При оценивании плотности распределения (дифференциальной функции) весь интервал возможных значений оценки ϵ разбивают на K интервалов. Длины интервалов не обязательно должны быть равными. После получения выборки $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ подсчитывают количество попаданий выборочных значений в каждый из K интервалов - $m_k, k = \overline{1, K}$ и определяют частоты

$$v_k = \frac{m_k}{N}, k = \overline{1, K} \quad (4.8)$$

Если k -й интервал имел длину Δx_k , то за оценку значения плотности распределения $f(x)$ на этом интервале берут

$$\hat{f}(x) = \frac{v_k}{\Delta x_k} = \frac{m_k}{N \Delta x_k}, x_{k-1} \leq x < x_k \quad (4.9)$$

где x_{k-1} и x_k - границы k -го интервала. Таким образом, оценка $\hat{f}(x)$ имеет вид ступенчатой функции или *гистограммы*. Поэтому данный метод в литературе получил названия *метода гистограмм*. Можно показать, что полученная оценка является состоятельной, несмещенной и эффективной. Непростым вопросом при использовании метода гистограмм является выбор количества интервалов K . Считается, что для получения приемлемых результатов необходимо, чтобы в каждый интервал попало не менее 8 значений случайной величины ϵ . Однако это требование сложно использовать для определения K . Существует эмпирическое *правило Штюргеса*, которое утверждает, что число интервалов гистограммы K и объем выборки N связаны следующим соотношением

$$K = 1 + 3,2 \lg N \quad (4.10)$$

Так при $N = 1000$ получаем, что $K \approx 10$.

Обратимся теперь к оценке интегральной функции распределения. Расположим результаты эксперимента $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ в порядке возрастания. Получим в результате т.н. *вариационный ряд*

$$\epsilon^{(1)} \leq \epsilon^{(2)} \leq \dots \leq \epsilon^{(N)} \quad (4.11)$$

Пусть x - неслучайная величина. Количество членов вариационного ряда (4.11) меньших x называется *эмпирической частотой*

$$v(x) = M, \epsilon^{(m)} < x, m = 1, \dots, M \quad (4.12)$$

Эмпирической функцией распределения называется функция

$$F(x) = \frac{v(x)}{N} = \begin{cases} 0, & x < \epsilon^{(1)} \\ M/N, & \epsilon^{(m)} \leq x < \epsilon^{(m+1)} \\ 1, & \epsilon^{(N)} \leq x \end{cases} \quad (4.13)$$

Функция $F(x)$ имеет ступенчатый вид и изменяется от 0 до 1. Скачки функции приходятся на выборочные значения и их величина равна $1/N$. В математической статистике доказано, что $F(x)$ - состоятельная и несмещенная оценка интегральной функции распределения.

4.2. Проверка соответствия выбранной модели распределения данным эксперимента

Во многих случаях исследователь, проводивший математический эксперимент, с той или иной степенью уверенности может предположить, что наблюдаемая оценка ϵ имеет некоторое модельное распределение вероятностей. В этом случае выборочные данные $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ можно использовать для того, чтобы либо принять гипотезу о справедливости сделанного предположения, либо отвергнуть ее. Задача проверки соответствия выбранной модели распределения и данных эксперимента решается с помощью т.н. *критериев согласия*. Алгоритм проверки для всех критериев согласия следующий.

Пусть H_0 - гипотеза о том, что полученное эмпирическое распределение выборки $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ согласуется с некоторым модельным. Для подтверждения или отрицания гипотезы H_0 выбирают некоторую функцию U , заданную на множестве эмпирических и модельных распределений. Величина U , вычисленная на полученном эмпирическом и выбранном модельном распределении, является случайной и называется *решающей статистикой*. В качестве решающей статистики нельзя брать

любую функцию, поскольку в общем случае ее распределение вероятности зависит и от фактического, и от модельного распределений. Однако при разработке методов согласия были найдены такие функции U , статистика которых практически не зависит от условий эксперимента и может быть определена заранее. При использовании такой решающей статистики процедура принятия гипотезы H_0 состоит в проверке условия

$$U < U_0 \quad (4.14)$$

где U_0 - порог сравнения, который вычисляется на основании решения одного из следующих уравнений

$$\Pr\{U \geq U_0\} = \alpha \text{ или } \Pr\{U < U_0\} = 1 - \alpha \quad (4.15)$$

В уравнениях (4.14) – (4.15) соответствующие вероятности вычисляются на основании известного распределения вероятностей решающей статистики U . Постоянная α , которая называется *уровнем значимости*, выбирается заранее и устанавливает допустимую вероятность ошибки при проверке гипотезы H_0 . Обычно $\alpha = 0,05 \dots 0,1$. В случае, если неравенство (4.14) не выполняется, гипотеза H_0 отвергается, и исследователь должен предложить другую гипотезу о виде модельного распределения. Все существующие критерии согласия различаются по виду решающей статистики. Рассмотрим наиболее часто используемые критерии согласия.

4.2.1. Критерий Пирсона

Разобьем область определения модельной плотности распределения вероятностей $F(x)$ на K интервалов и обозначим вероятности попадания оценки \mathcal{E} в k -й интервал Δ_k через $p_k = \Pr\{\mathcal{E} \in \Delta_k\}$. Согласно критерию Пирсона решающей статистикой является следующая мера расхождения модельного и эмпирического распределений

$$U = \sum_{k=1}^K \frac{(m_k - Np_k)^2}{Np_k} = N \sum_{k=1}^K \frac{(m_k/N - p_k)^2}{p_k} \quad (4.16)$$

где m_k - количество значений оценки, попавших в k -й интервал Δ_k

$$(\sum_{k=1}^K m_k = N).$$

Пирсон доказал следующую теорему. Если проверяемая гипотеза H_0 об истинности модельного распределения $F(x)$ верна, то при объеме выборки $N \rightarrow \infty$ закон распределения решающей статистики U зависит

только от числа интервалов K и приближается асимптотически к закону распределения χ^2 (хи-квадрат) с $s = K - J - 1$ степенями свободы, где J - число неизвестных параметров модельного распределения.

Выдвинув гипотезу H_0 об истинности модельного распределения $F(x)$, мы тем самым устанавливаем, от какого числа параметров J оно зависит. Если значения всех или части параметров не известны, то они заменяются оценками. После определения оценок параметров модельной функции $F(x)$ распределения вычисляются вероятности $p_k = \Pr\{x \in \Delta_k\}$

$$p_k = F(x_{k+1}) - F(x_k), \Delta_k = x_{k+1} - x_k \quad (4.17)$$

попадания оценки в k -й интервал Δ_k .

Из теоремы Пирсона следует, что какова бы ни была гипотетическая функция распределения вероятностей $F(x)$ случайная величина U при $N \rightarrow \infty$ имеет распределение χ^2

$$\Pr\{U < u\} = \frac{\Gamma(s/2, u/2)}{\Gamma(s/2)} \quad (4.18)$$

где $\Gamma(s/2, u/2) = \int_0^{u/2} x^{s/2-1} e^{-x} dx$ - неполная, а $\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} x^{s/2-1} e^{-x} dx$ - полная гамма - функции, которые могут быть вычислены либо численно, либо по таблицам.

Таким образом, процедура проверки гипотезы H_0 согласно критерию Пирсона выглядит следующим образом:

1. Задаем значение доверительной вероятности $P_0 = 1 - \alpha$ или уровня значимости α . Обычно $\alpha = 0,05 \dots 0,1$.
2. По значению α и числу степеней свободы s на основании (4.18) находим величину порога сравнения U_0 .
3. На основании (4.16) и (4.17) вычисляем значение решающей статистики U и сравниваем его с порогом U_0 . Если значение U меньше порога U_0 , то гипотеза H_0 принимается. Если $U > U_0$, то гипотеза отвергается.

Критерий Пирсона является одним из наиболее широко используемых на практике и дает хорошие результаты при объеме выборки N порядка 100 и выше. Недостатками критерия являются:

1. Необходимость иметь сравнительно большую выборку.
2. Произвольное разбиения области определения модельной плотности распределения вероятностей $F(x)$ на K интервалов, которое не учитывает особенностей функции $F(x)$.

4.2.2. Критерий Колмогорова

Согласно этому критерию количественной мерой соответствия модельного $F(x)$ и эмпирического $\mathbb{F}(x)$ распределений вероятностей для выборки $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_N$ объема N служит максимум их модуля разности

$$U = \max_x |F(x) - \mathbb{F}(x)| \quad (4.19)$$

Колмогоров доказал, что если проверяемая гипотеза H_0 верна, то при $N \rightarrow \infty$ и дополнительном предположении о непрерывности $F(x)$ функция распределения величины $\sqrt{N}U$ асимптотически стремится к функции Колмогорова

$$\Pr\{\sqrt{N}U < z\} = K(z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} \quad (4.20)$$

Представление (4.20) удобно использовать при $z > 1$, когда ряд сходится быстро. При $z < 1$, когда ряд в (4.20) сходится медленно, удобнее пользоваться другим представлением

$$K(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{8z^2}} \quad (4.21)$$

Таким образом, правило проверки гипотезы H_0 согласно критерию Колмогорова таково:

1. Задаем значение доверительной вероятности $P_0 = 1 - \alpha$ или уровня значимости α . Обычно $\alpha = 0,05 \dots 0,1$.
2. По значению α и числу степеней свободы s на основании (4.20) или (4.21) находим величину порога сравнения U_0 .
3. На основании (4.19) вычисляем значение решающей статистики U и сравниваем его с порогом U_0 . Если значение U меньше порога U_0 , то гипотеза H_0 принимается. Если $U > U_0$, то гипотеза отвергается.

Как и критерий Пирсона, критерий Колмогорова используется при достаточно больших объемах выборки ($N = 50 \dots 80$). Однако при использовании этого критерия не требуется дополнительного разбиения области определения $F(x)$ на интервалы.

4.2.3. Критерий Крамера – Мизеса

Согласно этому критерию количественной мерой соответствия для выборки объема N служит значение среднего значения квадрата отклонения модельного распределения от эмпирического

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - \mathbb{F}(x)]^2 f(x) dx \quad (4.22)$$

где $f(x)$ - плотность распределения $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Подстановка (4.13) в (4.22)

и интегрирование позволяет получить другое выражение для решающей статистики

$$U = \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[F(\mathbb{F}^{(n)}) - \frac{2n-1}{2N} \right]^2 \quad (4.23)$$

Для величины NU в математических таблицах можно найти предельное при $N \rightarrow \infty$ распределение вероятностей, на основании которого по заданному уровню значимости α можно определить величину порога сравнения U_0 . Дальнейшая процедура использования критерия ничем не отличается от алгоритма использования критерия Колмогорова.

Критерий Крамера – Мизеса может использоваться при малых объемах выборки ($N \leq 50$).

4.3. Оценка моментов распределения

Оценка эмпирического распределения и проверка его соответствия модельному распределению не являются единственными проблемами, возникающими при обработке результатов эксперимента. Обычно при обработке оценивают моменты распределения оценки \mathbb{F} . Как правило, при этом ограничиваются лишь первыми начальными или центрированными моментами. Оценка моментов распределения случайной величины \mathbb{F} позволяет не только определить центр группирования результатов измерений и меру их разброса, но и судить о качественном характере распределения вероятностей.

Для случайных величин в теории вероятностей вводятся начальные моменты

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

и центральные моменты

$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^p f(x) dx, p = 2, 3, \dots \quad (4.25)$$

где $f(x)$ - плотность распределения оценки \mathcal{E} . Между семействами начальных и центрированных моментов существует взаимно однозначное соответствие.

Наибольшее применение нашли величины, связанные с первыми четырьмя моментами распределения.

1. Математическое ожидание

$$\mu = M_1 \quad (4.26)$$

Представляет собой центр группирования результатов измерений.

2. Дисперсия

$$D = m_2 \quad (4.27)$$

представляет собой меру разброса случайной величины. Для случайных процессов дисперсия равна средней мощности процесса.

3. Коэффициент асимметрии

$$\beta_1 = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}} \quad (4.28)$$

Унимодальное распределение с $\beta_1 < 0$ имеет левую асимметрию, с $\beta_1 > 0$ - правую (рис. 4.1). Если $\beta_1 = 0$, распределение симметрично.

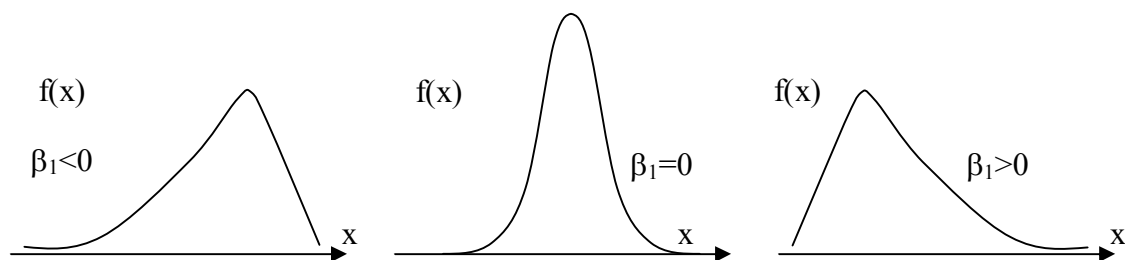


Рис. 4.1

4. Коэффициент эксцесса

$$\beta_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2} - 3 \quad (4.29)$$

характеризует остроту вершины плотности распределения. За ноль по шкале β_2 принят эксцесс гауссовского распределения (в этом случае $m_4/(m_2)^2 = 3$). Плотности с $\beta_2 < 0$ имеют более плоскую вершину, чем гауссовская плотность, а плотности с $\beta_2 > 0$ - более острую (рис. 4.2).

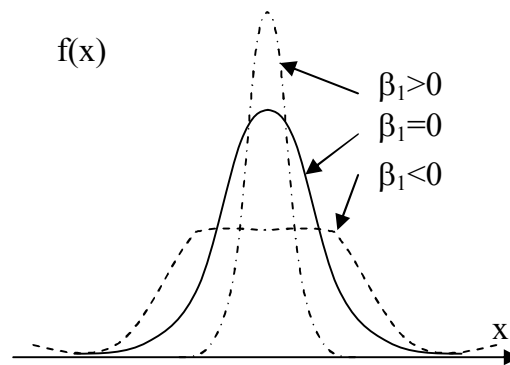


Рис. 4.2

Начальные моменты распределения оцениваются по выборке $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ следующим образом

$$\mathcal{M}_p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \epsilon_n^p \quad (4.30)$$

Данные оценки являются состоятельными и несмещенными.

Несколько сложнее обстоит дело с центральными моментами и, в частности, с дисперсией. Если математическое ожидание μ оценки ϵ известно, то оценка p -го момента находится как

$$\mathcal{M}_p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \mu)^p \quad (4.31)$$

Априорное знание математического ожидания μ на практике встречается не так редко, как это может показаться. Например, принимаемые радиосигналы часто являются случайными процессами с нулевым математическим ожиданием.

Если математическое ожидание μ неизвестно, то оценки (4.31), где вместо μ подставляется оценка $\mu = M_1$, будет смещенной. Смещение можно сделать равным нулю, если несколько изменить (4.31)

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \mu)^2, \\ \mu_3 &= \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \mu)^3, \\ \mu_4 &= \frac{N^2 - 2N + 3}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \mu)^4 - \frac{3(2N-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \left[\sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \mu)^2 \right]^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\mu = N^{-1} \sum_{n=1}^N \epsilon_n$ - оценка математического ожидания.

4.4. Оценка корреляционной функции случайного процесса

Оценка корреляционной функции позволяет не только определить степень статистической зависимости двух разнесенных по времени отсчетов случайного процесса и определить один из важных параметров процесса – время декорреляции, но также является необходимой операцией для дальнейшего спектрального анализа.

Пусть наблюдается случайный процесс $\xi(t)$ и получено N его отсчетов $\xi[0], \dots, \xi[N-1]$ в дискретные моменты времени. Для оценки корреляционной функции используют два способа.

Несмещенная оценка. Оценка значения корреляционной функции в момент mT равна

$$\hat{R}[m] = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \tilde{\xi}[n] \tilde{\xi}[n+m] \quad (4.33)$$

где $\tilde{\xi}[n] = \xi[n] - \mu$ - центрированный отсчет процесса, т.е. отсчет, из которого вычтена оценка математического ожидания μ . Оценка (4.33) является несмещенной. Однако эта оценка обладает одним недостатком: при увеличении m дисперсия $\hat{R}[m]$ растет. Это объясняется тем, что для расчета $\hat{R}[m]$ используется $(N - m)$ пар отсчетов случайного процесса. В связи с этим при увеличении m количество произведений в сумме (4.33) уменьшается и качество усреднения ухудшается. Поэтому на практике чаще используют другую оценку корреляционной функции.

Смещенная оценка. В этом случае оценка вычисляется как

$$\tilde{R}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \xi[n] \xi[n+m] = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R[m] \quad (4.34)$$

Данная оценка хотя и имеет смещение, но дисперсия ошибки оценивания для нее меньше, чем у несмещенной оценки. Понять причину этого несложно, если учесть, что смещенная оценка может быть получена из несмещенной умножением последней на треугольное окно $w[m] = (1 - |m|/N)$, значения отсчетов которого убывают с увеличением m .

4.5. Оценка спектральной плотности мощности случайных процессов

Оценка спектральной плотности мощности (СПМ) случайных процессов является наиболее часто встречающейся задачей при обработке результатов измерений. Важность этой проблемы подтверждается огромным числом публикаций на данную тему. К настоящему времени предложено большое число методов спектрального оценивания, даже краткое рассмотрение которых в несколько раз увеличило бы объем настоящего учебного пособия. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь двух классических методов спектрального анализа¹.

4.5.1. Метод коррелограмм

СПМ и корреляционная функция случайного стационарного процесса $\xi(t)$ в соответствии с теоремой Винера – Хинчина связаны прямым преобразованием Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.35)$$

Пусть корреляционная функция оценена в дискретные моменты времени nT , $n = \overline{0, N}$. Тогда оценка СПМ может быть вычислена, если интеграл в (4.35) вычислить методом прямоугольников

$$\hat{S}(\omega) = T \sum_{n=-N}^{N-1} \hat{R}[n] e^{-in\omega T} \quad (4.36)$$

¹ Тех, кто заинтересуется проблемой спектрального анализа и ее состоянием на настоящий момент, мы адресуем к монографии С. Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

где $R[n]$ при $n < 0$ вычисляются на основании известного свойства корреляционной функции

$$R[-n] = R^*[n], n = 1, 2, \dots$$

Расчет $S(\omega)$ удобно производить в дискретных точках

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{2NT}, m = \overline{0, 2N-1} \quad (4.37)$$

Тогда

$$S[m] = T \sum_{n=-N}^{N-1} R[n] e^{-i \frac{2\pi}{2N} mn}, m = \overline{0, 2N-1} \quad (4.38)$$

Последнее равенство целесообразно переписать в виде удобном для использования при вычислениях алгоритма *быстрого преобразования Фурье* (БПФ)

$$S[m] = T \sum_{n=0}^{N_1-1} R[n] e^{-i \frac{2\pi}{N_1} mn}, m = \overline{0, N_1-1} \quad (4.39)$$

где $N_1 = 2N$, $R[n]$, $n = \overline{0, N_1-1}$ - вектор размерности $2N$

$$R[n] = \begin{cases} R[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ R[2N-n], & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Отметим, что для использования алгоритма БПФ N должно быть равно целой степени числа 2.

Использование метода коррелограмм в вышеизложенном виде приводит к возникновению значительных пульсаций у оценки СПМ. Причиной этих пульсаций является обрезание «хвостов» корреляционной функции при переходе от интеграла (4.35) к конечной сумме (4.36). Поскольку это обрезание фактически эквивалентно перемножению бесконечной по своей протяженности корреляционной функции на прямоугольное окно протяженности $2N$, то здесь мы встречаемся с обсуждавшимся в разделе 3.1.4. эффектом Гиббса. Для уменьшения уровня пульсаций, как это было сделано и при синтезе КИХ фильтров, используются различные весовые окна (см. табл. 1), на которые умножаются отсчеты $R[n]$, $n = \overline{0, N_1-1}$. При этом уровень пульсаций удастся уменьшить. Однако

разрешающая способность такого спектроанализатора хуже, чем у спектроанализатора с прямоугольным весовым окном.

4.5.2. Метод периодограмм

Пусть в результате эксперимента получена дискретная выборка отсчетов процесса $\xi[0], \dots, \xi[N-1]$. Без потери общности можно считать, что математическое ожидание этих отсчетов равно нулю. Вычислим для полученной выборки *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ)

$$G[m] = T \sum_{n=0}^{N-1} \xi[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} mn}, m = \overline{0, N-1} \quad (4.41)$$

где $G[m]$ - дискретный отсчет мгновенного спектра процесса $G(\omega)$ при $\omega_m = \frac{2\pi}{NT} m$. Вычислим $TN^{-1}|G[m]|^2$

$$TN^{-1}|G[m]|^2 = TN^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \xi[n] \xi[k] e^{-i \frac{2\pi}{N} m(n-k)} \quad (4.42)$$

Простой заменой индексов суммирования двойную сумму в (4.42) можно привести к виду

$$TN^{-1}|G[m]|^2 = T \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \mathcal{K}[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} mn} \quad (4.43)$$

где

$$\mathcal{K}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \xi[n] \xi[n+|m|] -$$

смещенная оценка корреляционной функции процесса. Следовательно, правая часть равенства (4.43) является ДПФ оценки корреляционной функции и может быть принята в силу теоремы Винера – Хинчина за оценку СПМ. Таким образом, оценка СПМ может быть получена с использованием периодограммы (мгновенного спектра) $G[m]$ как

$$\mathcal{S}[m] = \frac{T}{N} |G[m]|^2, m = \overline{0, N-1} \quad (4.44)$$

В этот и заключается смысл метода периодограмм.

В теории спектрального анализа доказывается, что оценки (4.39) и (4.44) несостоятельны, поскольку при увеличении N их дисперсия не стремится к нулю. В методе периодограмм уменьшение ошибки оценивания достигается тем, что:

- производится усреднение в скользящем окне соседних отсчетов периодограммы (метод Даньелла);
- вся выборка разбивается на неперекрывающиеся множества отсчетов процесса с последующим равновесным усреднением периодограмм этих множеств (метод Барлетта);
- выборка процесса разбивается на перекрывающиеся множества отсчетов процесса с последующим усреднением периодограмм этих множеств в весовом окне (метод Уэлча).