

Лабораторные работы №2, 3

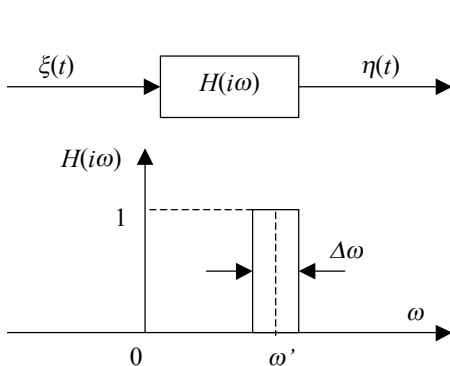
«Моделирование гауссовских случайных процессов с заданными корреляционными свойствами»

1. Метод дискретного преобразования Фурье

Постановка задачи: требуется создать отрезок реализации комплексного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ длительности T_n , если известна его корреляционная функция (КФ) $K_\xi(t)$.

В соответствии с теоремой Винера – Хинчина спектральная плотность мощности (СПМ) случайного стационарного процесса $S_\xi(\omega)$ равна

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0} \quad (1)$$



Предположим, что процесс $\xi(t)$ поступает на вход узкополосного фильтра с прямоугольной частотной характеристикой, отличной от нуля в полосе частот $[\omega' - \Delta\omega/2, \omega' + \Delta\omega/2]$, т.е.

$$H(i\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega'| \leq \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega'| > \Delta\omega/2 \end{cases}$$

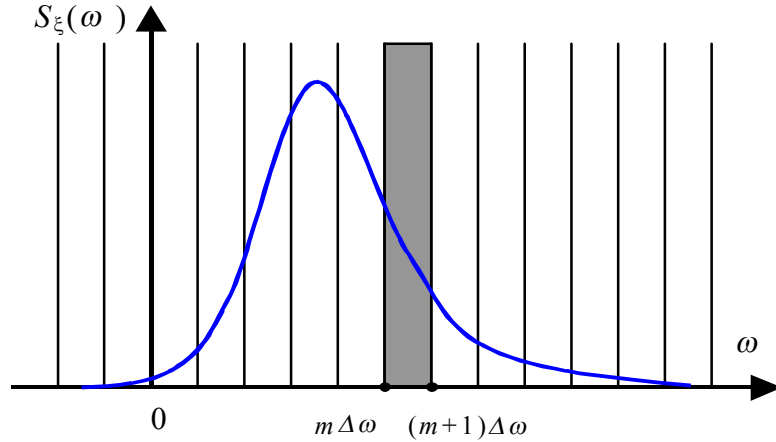
где $\omega', \Delta\omega$ - средняя частота и ширина полосы пропускания фильтра. Тогда средняя мощность сигнала на выходе фильтра будет равна

$$P_\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) |H(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega' - \Delta\omega/2}^{\omega' + \Delta\omega/2} S_\xi(\omega) d\omega \quad (2)$$

Если функция $S_\xi(\omega)$ мало меняется в полосе частот $[\omega' - \Delta\omega/2, \omega' + \Delta\omega/2]$, то будет выполняться примерное равенство

$$P_\eta \approx S_\xi(\omega') \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (3)$$

причем (3) соблюдается тем точнее, чем меньше полоса $\Delta\omega$. Последнее уравнение определяет физический смысл функции $S_\xi(\omega)$: СПМ описывает распределение средней мощности случайного процесса $\xi(t)$ по частотам гармонических колебаний, входящих в его состав. Такая интерпретация СПМ и равенства (3) дает возможность предложить следующий метод генерации процесса $\xi(t)$. Разобьем частотную область на соприкасающиеся между собой полосы одинаковой ширины $\Delta\omega$. Средняя частота m -ой полосы равна



$\omega_m = (m+0,5)\Delta\omega$. Пусть величина $\Delta\omega$ взята настолько малой, что (3) выполняется с высокой точностью. Тогда сумму гармоник случайного процесса $\xi(t)$, попадающих в m -ю полосу, вследствие малости $\Delta\omega$, можно заменить на одно гармоническое колебание частоты ω_m , которое имеет случайную амплитуду U_m и фазу φ_m . При этом для всего процесса будет справедливо следующее представление

$$\xi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m \exp\{i[\omega_m t + \varphi_m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{i\omega_m t} \quad (4)$$

где $x_m = U_m e^{i\varphi_m}$ - комплексная амплитуда m -й гармоники.

Из теории вероятностей известно, что сумма произвольного числа гауссовских случайных процессов также является гауссовской случайной величиной. Следовательно, поскольку процесс $\xi(t)$ - гауссовский, т.е. в любой момент времени t' случайная величина $\xi(t')$ распределена по нормальному закону, гармонические составляющие в правой части (4) также должны быть гауссовскими случайными процессами. Для этого достаточно чтобы случайные величины U_m и φ_m при различных индексах m были независимы и имели соответственно плотность распределения Релея (U_m) и равномерную в интервале $[-\pi, \pi]$ плотность (φ_m). Это требование эквивалентно тому, что амплитуды x_m должны были комплексными гауссовскими случайными величинами, дисперсии которых D_m должны быть равны средней мощности процесса $\xi(t)$, приходящейся на m -ю полосу

$$D_m = \langle |x_m|^2 \rangle = S_{\xi}(\omega_m) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (5)$$

где треугольные скобки означают усреднение по ансамблю.

Если процесс $\xi(t)$ имеет ограниченный по частоте спектр, т.е. $S_{\xi}(\omega)=0$ при $|\omega| > \Omega_{\max}$, где Ω_{\max} - максимальная частота спектра, то бесконечный ряд (4) можно заменить конечной суммой

$$\xi(t) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_m e^{i\omega_m t} \quad (6)$$

где $M \approx 2 \Omega_{\max} / \Delta\omega$ - количество гармоник, необходимое для моделирования случайного процесса. Тогда дискретные отсчеты процесса $\xi[n] = \xi(n\Delta t)$ во времени, взятые в соответствии с теоремой Котельникова с периодом дискретизации $\Delta t \leq \pi / \Omega_{\max}$ могут быть получены как

$$\xi[n] = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_m e^{i \frac{2\pi}{N} nm} \quad (7)$$

где $\Delta\omega \Delta t = 2\pi/N$. Таким образом, отсчеты случайного процесса представляют собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательно $\{x_m\}$. Соответствующим выбором $\Delta\omega$ и Δt можно сделать N равным целой степени числа 2 ($N = 2^l \geq M$), где l – целое число. Это дает возможность использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) для вычисления (7).

Окончательно алгоритм генерации случайного процесса методом дискретного преобразования Фурье может быть представлен последовательностью следующих шагов:

1-й шаг. На основании заданной КФ (или СПМ) процесса выбираются $\Delta\omega$, Δt и M так, чтобы $N (= 2\pi/\Delta\omega \Delta t \geq M)$ было целой степенью числа 2.

2-й шаг. Генерируется массив из M независимых комплексных случайных чисел z_m с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

3-й шаг. Вычисляются комплексные амплитуды $x_m = \sqrt{D_m} z_m$, где D_m определяются в соответствии с (5).

4-й шаг. Вычисляются дискретные отсчеты случайного процесса $\xi[n]$ на основании (7) и использованием алгоритма БПФ.

2. Метод формирующего фильтра

Генерация нормального случайного процесса методом формирующего фильтра основывается на двух положениях теории случайных процессов:

1. Результатом произвольного линейного преобразования гауссовского случайного процесса является также случайный гауссовский процесс;
2. Спектральные плотности мощности случайных процессов на входе и выходе линейного фильтра с частотной характеристикой $H(i\omega)$ связаны соотношением

$$S_{\text{вых}}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{\text{вх}}(\omega) \quad (8)$$

Если предположить, что на вход фильтра поступает процесс типа белого шума ($S_{\text{бш}}(\omega) = N_0/2$, $|\omega| < \infty$), то СПМ процесса на выходе будет равна

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(i\omega)|^2 \quad (9)$$

Следовательно, для формирования гауссовского случайного процесса с заданной СПМ $S_{\xi}(\omega)$ необходимо на вход фильтра с частотной характеристикой, модуль которой равен

$$|H(i\omega)| = \sqrt{S_\xi(\omega)} \quad (10)$$

подать белый шум с единичной спектральной плотностью $N_0/2=1$. При этом сигнал на выходе фильтра будет иметь нормальное распределение в силу п. 1, т.к. фильтрация – операция линейная. Фильтр, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которого удовлетворяет (10), называется формирующим.

Равенство (10) дает возможность вычислить лишь АЧХ и не определяет его фазо-частотную характеристику (ФЧХ). Поэтому этот вопрос остается открытым и требует дополнительного исследования.

Допустим, что ФЧХ фильтра $\varphi(\omega)=0$, $|\omega|<\infty$. Тогда $H(i\omega) = |H(i\omega)|$ и импульсная характеристика фильтра равна

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)| e^{i\omega t} d\omega \quad (11)$$

Так как $h(t) = h(-t)$, т.е. $h(t) \neq 0$ при $t < 0$, фильтр является физически нереализуемым (в физически реализуемом фильтре $h(t) = 0$ при $t < 0$).

Данный пример свидетельствует о том, что выбор ФЧХ формирующего фильтра должен быть сделан таким образом, чтобы фильтр был физически реализуем. Синтез такого фильтра в общем случае сложен. Однако, если СПМ процесса – дробно-рациональная функция вида

$$S_\xi(\omega) = \frac{b_M \omega^{2M} + b_{M-1} \omega^{2(M-1)} + \dots + b_0}{a_N \omega^{2N} + a_{N-1} \omega^{2(N-1)} + \dots + a_0} \quad (12)$$

где $b_m, m = \overline{0, M}$ и $a_n, n = \overline{0, N}$ – действительные числа ($N \geq M$), то процедура синтеза формирующего фильтра проста и состоит в следующем.

Из теории алгебраических уравнений известно, что неотрицательный полином степени $2K$ имеет лишь K пар комплексно сопряженных корней. Пусть $\alpha_n, \alpha_n^*, n = \overline{1, N}$ и $\beta_m, \beta_m^*, m = \overline{1, M}$ корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе (9) соответственно. Тогда (12) можно переписать

$$S_\xi(\omega) = \frac{\prod_{m=1}^M (\omega - \beta_m) \prod_{m=1}^M (\omega - \beta_m^*)}{\prod_{n=1}^N (\omega - \alpha_n) \prod_{n=1}^N (\omega - \alpha_n^*)} \frac{b_M}{a_N} \quad (13)$$

Причем в силу того, что $S_\xi(\omega) \geq 0$, a_N и b_M – положительные числа, и обозначения корней $\alpha_n, \alpha_n^*, n = \overline{1, N}$ и $\beta_m, \beta_m^*, m = \overline{1, M}$ можно сделать такими, что α_n и β_m будут иметь положительные мнимые части

$$\text{Im}\{\alpha_n\} \geq 0, \text{Im}\{\beta_m\} \geq 0 \quad (14)$$

Сделаем в (13) замену переменной $\omega = -is$ в первой дроби и $\omega = is^*$ во второй (это возможно, т.к. ω – действительная переменная). Тогда

$$S_{\xi}(-is) = \frac{F(s)F(s^*)}{G(s)G(s^*)} = \frac{|F(s)|^2}{|G(s)|^2}, \text{ где} \quad (15)$$

$$F(s) = \sqrt{\frac{b_M}{a_N}} \prod_{m=1}^M (s + f_m), \quad (16)$$

$$G(s) = \prod_{n=1}^N (s + g_n), \quad (17)$$

$f_m = i\beta_m$, $g_n = i\alpha_n$. Вследствие условия (14) полиномы $F(s)$ и $G(s)$ имеют корни в левой полуплоскости комплексной переменной s . Поэтому, если взять в качестве частотной характеристики формирующего фильтра

$$H(s) = \frac{F(s)}{G(s)} \quad (18)$$

мы получим устойчивый реализуемый фильтр, АЧХ которого в силу (15) и (18) соответствует условию (10).

Таким образом алгоритм моделирования гауссовского случайного процесса с заданными корреляционными (спектральными) свойствами состоит в пропускании реализации белого шума с единичной спектральной плотностью через линейный фильтр, частотная характеристика которого соответствует (18). Для успешного решения задачи моделирования методом формирующего фильтра необходимо, чтобы СПМ случайного процесса описывалась дробно-рациональной функцией от переменной ω вида (12). В ходе синтеза формирующего фильтра находят корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе (12), и приводят выражения для СПМ к виду (13). Затем определяют корни полиномов - α_n , $n = \overline{1, N}$ и β_m , $m = \overline{1, M}$, которые имеют положительные мнимые части (см. условие (14)), и составляют полиномы $F(s)$ и $G(s)$ в соответствии с (16) и (17). Частотная характеристика формирующего фильтра получается на основании (18). Необходимо заметить, что для получения отрезка случайного процесса с заданными свойствами на выходе формирующего фильтра необходимо, чтобы переходные процессы в фильтра закончились. Поэтому к сохранению выборки случайного процесса нужно перейти только после того, как модель проработала некоторое время на «холостом ходу». Обычно это время оценивается как $(2..3)/\Delta f_{эф}$, где $\Delta f_{эф}$ - эффективная ширина полосы пропускания формирующего фильтра (см. ниже).

Полученный в ходе такого синтеза фильтр является аналоговым. Кроме того, белый шум, который подается на вход формирующего фильтра, также является «аналоговым» сигналом. Поэтому необходимо создать математические модели формирующего фильтра и белого шума. Созданию математической модели формирующего фильтра, т.е. цифрового фильтра, посвящен следующий раздел. Поэтому рассмотрим вопрос о генерации белого шума при цифровом моделировании.

Случайный процесс, который в научной литературе называется белым шумом, имеет спектральную плотность мощности $N_0/2$ постоянную во всей частотной области. Следовательно, его средняя мощность (дисперсия) бесконечна. Поэтому белый шум не является физически реальным процессом, а представляет собой удобную математическую абстракцию. При создании его

цифровой модели необходимо сохранить два его основных свойства: постоянство СПМ в частотной области и статистическую независимость временных отсчетов, взятых в произвольные моменты времени. Второе свойство реализуется при моделировании весьма просто: за реализацию дискретного белого шума берется набор независимых случайных чисел, получающихся на выходе генератора случайных величин с нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией σ^2 . Очевидно, что величина этой дисперсии (т.е. средняя мощность процесса) должна быть каким-то образом связана со спектральной плотностью мощности «аналогового» белого шума $N_0/2$, дискретную модель которого мы создаем. Для того чтобы связать эти величины воспользуемся требованием постоянства СПМ в частотной области.

Известно, что при дискретизации непрерывного сигнала с периодом взятия отсчетов Δt , спектральная функция дискретизированного сигнала становится периодической с периодом $1/\Delta t$. Поэтому, если СПМ нашего дискретного белого шума будет постоянна и равна $N_0/2$ на интервале $[-0,5/\Delta t, 0,5/\Delta t]$, то автоматически она будет постоянна и во всей частотной области. С другой стороны, дисперсия случайного процесса с равномерной в указанном интервале СПМ равна (см. (2))

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-0,5/\Delta t}^{0,5/\Delta t} \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{1}{2\pi \Delta t} \frac{N_0}{2} \quad (19)$$

Отсюда при $N_0/2=1$ получаем, что дисперсия независимых случайных чисел, составляющих реализацию дискретного белого шума должна быть равна

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi \Delta t} \quad (20)$$

Следовательно, реализация дискретного белого шума размером в N отсчетов должна быть выполнена в соответствии со следующим равенством

$$\zeta[n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta t}} z[n], \quad n = \overline{1, N} \quad (21)$$

где $z[n]$ – случайные независимые числа с нормальным стандартным распределением (нормальное стандартное распределение – распределение Гаусса с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией). Числа $z[n]$ можно получить используя встроенные процедуры генерации. В среде MATLAB такой процедурой является функция *randn(...)*.

3. Цифровое моделирование линейных фильтров

При цифровом моделировании линейного аналогового фильтра его входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы представляются в виде решетчатых функций $x[n]$ и $y[n]$, которые отличны от нуля для дискретных моментов времени $n\Delta t$, $n=0,1,2,\dots$, где Δt - период дискретизации. Точное равенство входных $x[n]=x(n\Delta t)$ и выходных сигналов $y[n]=y(n\Delta t)$ аналогового фильтра и его цифровой модели не достижимо. На практике возможно лишь приближенное равенство $y[n]\approx y(n\Delta t)$.

Задачей синтеза цифровой модели является нахождение такого алгоритма вычисления $y[n]$ по $x[n]$, при котором это приближенное равенство выполняется как можно точнее. Рассмотрим некоторые методы составления цифровой модели линейных аналоговых фильтров.

3.1. Метод инвариантности импульсной характеристики

При синтезе модели этим методом обеспечивается равенство импульсных характеристик аналогового фильтра и цифрового фильтра

$$h[n] = h(n\Delta t), n = 0, 1, \dots \quad (22)$$

Передаточная функция цифрового фильтра при этом равна z -преобразованию от импульсной характеристики

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (23)$$

Допустим, что аналоговый фильтр имеет передаточную функцию вида

$$H(s) = H_0 \frac{(s - S_1)(s - S_2) \dots (s - S_M)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)} \quad (24)$$

где $S_m, m = \overline{1, M}$ и $s_n, n = \overline{1, N}$ – нули и полюсы передаточной характеристики. Импульсная характеристика аналогового фильтра однозначно определяется как преобразование Лапласа $H(s)$ и в случае, когда полюсы $s_n, n = \overline{1, N}$ простые, равна

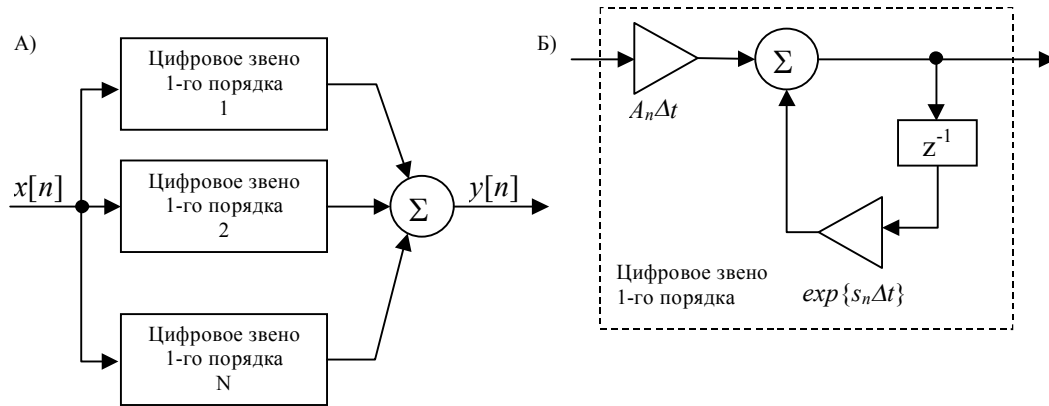
$$h(t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{s_n t} \quad (25)$$

где $A_n = H(s)(s - s_n) \Big|_{s=s_n}$; $\operatorname{Re}\{s_n\} < 0, n = \overline{1, N}$. Тогда на основании (22) импульсная характеристика цифрового фильтра равна

$$h[n] = \sum_{n=1}^N A_n e^{s_n \Delta t n}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (23), получим коэффициент передачи цифрового фильтра

$$H(z) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n \Delta t}{1 - e^{s_n \Delta t} z^{-1}}. \quad (26)$$



Учитывая, что умножение Z-преобразования цифрового сигнала на z^{-1} эквивалентно задержке сигнала на период дискретизации Δt , получим схему реализации фильтра в виде N параллельно включенных цифровых звеньев первого порядка (см. рис. А и Б).

Рассмотренный метод не может быть использован, когда коэффициент передачи аналогового фильтра $H(s)$ не имеет полюсов ($N=0$) или когда число полюсов меньше числа нулей ($N < M$).

3.2. Метод билинейного преобразования

Метод используется, когда передаточная функция аналогового фильтра задана в виде

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0} \quad (27)$$

и заключается в замене

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (28)$$

Метод билинейного преобразования гарантирует хорошее совпадение частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi/4\Delta t$.

При $|\omega| > \pi/4\Delta t$ частотные характеристики фильтров, как правило, значительно различаются.

3.3. Метод замены дифференциалов

Метод используется, когда передаточная функция аналогового фильтра задана в виде (27) и заключается в замене

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \quad (29)$$

Метод замены дифференциалов применим в ситуациях, когда метод инвариантности импульсной характеристики не используется. В то же время, метод может дать значительную разницу в частотных характеристиках фильтров, если нули коэффициента передачи аналогового фильтра $H(s)$ имеют действительную часть, превышающую по величине $1/2\Delta t$. Кроме того, метод не всегда гарантирует близкое совпадение характеристик аналогового и цифрового фильтра, когда $H(s)$ не имеет нулей ($M=0$).

4. Задания к лабораторной работе «Моделирование гауссовских случайных процессов с заданными корреляционными свойствами»

№	СПМ процесса	Параметры *)
1.	$S(\omega) = \frac{k}{(\omega^2 + \Omega_H^2)}$	k, Ω_H
2.	$S(\omega) = \frac{k}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^2}$	k, Ω_H
3.	$S(\omega) = \frac{k}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^3}$	k, Ω_H
4.	$S(\omega) = \frac{k}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	k, Ω_H
5.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^2}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{2}$
6.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^3}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{3}$
7.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{4}$
8.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)^2}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^3}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \sqrt{2/3}\Omega_H$
9.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)^2}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{2}$
10.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)^3}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \sqrt{3/4}\Omega_H$
11.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^2}$	k, Ω_H
12.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^3}$	k, Ω_H

13.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	k, Ω_H
14.	$S(\omega) = k \frac{\omega^4}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^3}$	k, Ω_H
15.	$S(\omega) = k \frac{\omega^4}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	k, Ω_H
16.	$S(\omega) = k \frac{\omega^6}{(\omega^2 + \Omega_H^2)^4}$	k, Ω_H
17.	$S(\omega) = \frac{k}{(\omega^4 + \Omega_H^4)}$	k, Ω_H
18.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2 + \Omega_B^2}{(\omega^4 + \Omega_H^4)}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{2}$
19.	$S(\omega) = \frac{k}{(\omega^4 + \Omega_H^4)^2}$	k, Ω_H
20.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2 + \Omega_B^2}{(\omega^4 + \Omega_H^4)^2}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{2}$
21.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)^2}{(\omega^4 + \Omega_H^4)^2}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{2}$
22.	$S(\omega) = k \frac{(\omega^2 + \Omega_B^2)^3}{(\omega^4 + \Omega_H^4)^2}$	$k, \Omega_H, \Omega_B = \Omega_H/\sqrt{2}$
23.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2}{(\omega^4 + \Omega_H^4)}$	k, Ω_H
24.	$S(\omega) = k \frac{\omega^2}{(\omega^4 + \Omega_H^4)^2}$	k, Ω_H
25.	$S(\omega) = k \frac{\omega^4}{(\omega^4 + \Omega_H^4)^2}$	k, Ω_H

*) Примечание. Не заданные параметры k, Ω_H выбираются таким образом, чтобы средняя мощность случайного процесса была единичной

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = 1, \quad (29)$$

а эффективная ширина спектра была равна 1 Гц

$$\Delta f_{\text{эф}} = \frac{1}{2\pi S_{\text{max}}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{S_{\text{max}}} = 1 \text{ Гц}, \quad (29)$$

где S_{max} - максимальное значение СПМ. Для вычисления интеграла в (28) и (29) целесообразно воспользоваться следующей формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_n(\omega)}{P_n(\omega)P_n(-\omega)} d\omega = (-1)^n \frac{\pi i}{B_0} \frac{M_n}{N_n} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} Q_n(\omega) &= A_0 \omega^{2n-2} + A_1 \omega^{2n-4} + \dots + A_{n-1} \\ P_n(\omega) &= B_0 \omega^n + B_1 \omega^{n-1} + \dots + B_n \end{aligned} \quad (31)$$

$$M_n = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \\ B_0 & B_2 & B_4 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & B_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_n \end{vmatrix}; N_n = \begin{vmatrix} B_1 & B_3 & B_5 & \dots & 0 \\ B_0 & B_2 & B_4 & \dots & 0 \\ 0 & B_1 & B_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_n \end{vmatrix} \quad (32)$$

В частности для $n=1,2,3,4$ определители M_n и N_n равны

$$\begin{aligned} M_1 &= A_0; N_1 = B_1; \\ M_2 &= A_1 B_0 - A_0 B_2; N_2 = B_1 B_2; \\ M_3 &= B_3(A_1 B_0 - A_0 B_2) - A_2 B_0 B_1; N_3 = B_3(B_0 B_3 - B_1 B_2); \\ M_4 &= A_0 B_4(B_2 B_3 - B_1 B_4) + B_0 B_4(A_2 B_1 - A_1 B_3) - A_3 B_0(B_0 B_3 - B_1 B_2); \\ N_4 &= B_4(B_0 B_3^2 + B_1^2 B_4) - B_1 B_2 B_3 B_4 \end{aligned} \quad (33)$$

В соответствии с номером варианта необходимо сгенерировать выборку случайного процесса с заданной спектральной плотностью мощности двумя из рассмотренных теоретических методов.

В качестве примера используйте файлы [LAB2.M](#) и [LAB3.M](#), размещенный в папке [Лабораторные работы по моделированию РТС](#) на [Рабочем Столе](#). Рекомендуется создать копию этого файла под своим именем в каталоге [\MATLAB\WORK](#) для модификации программы в соответствии с заданием.

Отчет по лабораторной работе должен включать:

1. Результаты теоретического исследования заданной плотности мощности случайного процесса с расчетом параметров k , Ω_H и выбором периода дискретизации Δt ; коэффициенты передачи аналогового и цифрового формирующих фильтров с обоснованием метода расчета и формулами для коэффициентов цифрового фильтра. Рекомендуется взять размер выборки $K=512$.
2. Листинг программы и графики, которые должны содержать кривые заданной плотности мощности и ее оценки, полученной по результатам моделирования выборки случайного процесса.
3. Выводы по работе.