Лабораторная работа №1

«Методы генерации случайных величин с произвольным законом распределения»

1. Метод обратных функций (метод нелинейного преобразования обратного функции распределения)

Этот метод основан на следующей теореме теории вероятностей: если имеется случайная величина η с плотностью распределения вероятности $w_\eta(y)$, то случайная величина ξ

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} w_\eta(y)dy \tag{1}$$

имеет равномерный закон распределения на интервале [0,1]. Действительно, найдем вероятность $\Pr\{\xi < x\} = F_\xi(x)$, где x - некоторое действительное число из интервала [0,1]; $F_\xi(x)$ - интегральная функция распределения случайной величины ξ. Для этого заметим, что интеграл, стоящий в правой части (1) равен интегральной функции распределения случайной величины η

$$W_\eta(y) = \int_{-\infty}^{y} w_\eta(y)dy \tag{2}$$

и в силу того, что $w_\eta(y) \geq 0$, является возрастающей функцией верхнего предела *y*. Тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$F_\xi(x) = \Pr\{\xi < x\} = \Pr\{W_\eta(\eta) < x\} = \Pr\{\eta < W_\eta^{-1}(x)\} = W\left(W_\eta^{-1}(x)\right) = x \tag{3}$$

где $W_\eta^{-1}(x)$ - функция обратная интегральной функции распределения $W_\eta(y)$. Если *x*<0, то поскольку интеграл в правой части (1) не может быть отрицательным, $\Pr\{\xi < x\} = 0$. Аналогично, если *x*>1, то $\Pr\{\xi < x\} = 1$, т.к. значение этого интеграла не может быть больше единицы. Таким образом

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x, 0 \leq x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{4}$$

Дифференцируя (4), получим плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, 0 \le x \le 1 \\ 0, x > 1 \end{cases} \tag{5}$$

Следовательно, случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале [0,1]. Это дает возможность предложить следующий алгоритм генерации случайной величины с произвольным законом распределения:

1-шаг. Генерируется случайная величина ξ с равномерным в интервале [0,1] законом распределения.

2-шаг. Искомая случайная величина η получается в результате следующих вычислений

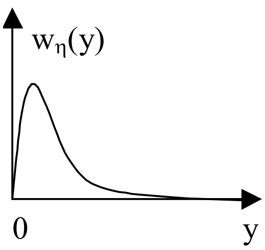
$$\eta = W_\eta^{-1}(\xi) \tag{5}$$

где $W_\eta^{-1}(x)$ - функция обратная интегральной функции распределения $W_\eta(y)$.

<u>Пример 1</u>. Необходимо получить случайные числа y_i с плотностью распределения вероятности $w_\eta(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \ge 0$ и интегральной функцией вероятности $W_\eta(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y \ge 0$.

Согласно теореме $x_i = \lambda \int\limits_0^{y_i} e^{-\lambda y} dy$. Тогда $x_i = W_\eta(y_i) = 1 - e^{-\lambda y_i}$. Находим обратную функцию: $y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x_i)$. Число x_i распределено равномерно на интервале [0,1]. Тогда и разность $1 - x_i$ распределена равномерно. Поэтому выражение можно упростить: $y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln x_i$.

<u>Пример 2</u>. Необходимо получить случайные числа y_i, распределенные по закону Релея. У такого случайного числа плотность распределения вероятности и интегральная функция вероятности имеют соответственно вид



$$w_\eta(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},\ y \ge 0,\ W_\eta(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},\ y \ge 0.$$

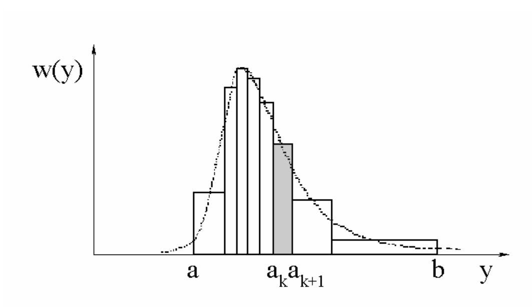
Случайные числа y_i можно получить путем следующего преобразования равномерно распределенных в интервале [0,1] случайных чисел x_i: $y_i = \sigma\sqrt{-2\ln(1 - x_i)} = \sigma\sqrt{-2\ln(x_i)}$.

Недостатки рассмотренного метода заключаются в том, что

- иногда трудно найти обратную функцию (не берется интеграл в (1)),
- требуется достаточный расход машинного времени.

2. Метод кусочной аппроксимации плотности распределения вероятности (Метод Бусленко Н. П.)

Суть метода состоит в замене плотности распределения вероятности ступенчатой функцией – набором *K* прямоугольников, вписанных в нее и имеющих одинаковые площади.



Предварительно перед аппроксимацией плотность распределения вероятности подвергается усечению в хвостах на интервале [*a, b*].

Площади *K* прямоугольников должны быть одинаковыми и равными $1/K$. Выделим прямоугольник с основанием [a_k,a_{k+1}], его площадь

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} w_\eta(y)dy = \frac{1}{K} \tag{6}$$

На основании (6) последовательно вычисляются значения $a_1 = a, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{K+1} = b$, начиная с точки *a* и заканчивая точкой *b*.

Алгоритм моделирования заключается в последовательности следующих действий:

1. Генерируется равномерно распределенное на интервале [0,1] случайное число ξ_1.
2. С помощью этого числа определяется номер $k =](K-1)\xi_1 + 1[$, где $]\cdot[$ - оператор округления до ближайшего целого. Таким образом, выделяется интервал $[a_k, a_{k+1}]$.
3. Генерируется следующее число ξ_2, равномерно распределенное на интервале [0,1].
4. Вычисляется случайное число $\eta = a_k + (a_{k+1} - a_k)\xi_2$. Число η является реализацией случайной величины заданного закона распределения.

Метод удобен для небольших *K* (до 64).

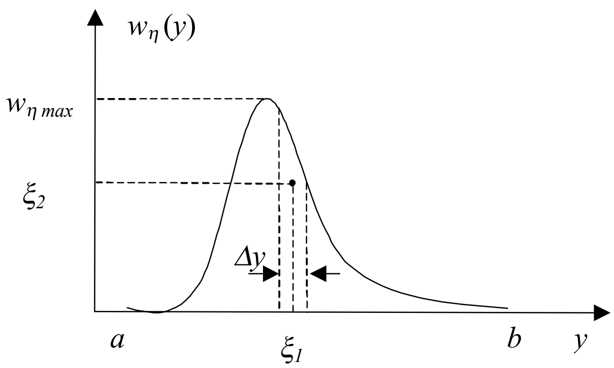
Достоинством является малое число операций, не зависящее от точности аппроксимации (*K*), так как масштабирование делается заранее до моделирования. К недостатку относится то, что точность аппроксимации не одинакова по всей области задания функции [*a*,*b*] и зависит от величины плотности $w_\eta(y)$. Чем меньше $w_\eta(y)$ на данном интервале, тем меньше точность, так как основание вписанного прямоугольника больше.

3. Метод отбора Неймана (метод отказов)

Этот метод также предполагает усечение плотности вероятности справа и слева на некотором интервале.

Случайная величина η характеризуется плотностью распределения вероятности $w_\eta(y)$, которая усекается на интервале [*a*,*b*].

Затем генерируются два равномерно распределенных случайных числа: ξ_1 и ξ_2 и осуществляется проверка, попадает ли точка с координатами [$a+(b-a)\xi_1$, $w_{\eta\,max}\xi_2$] под кривую плотности вероятности. Если это так, то запоминается первое число ξ_1, которое и используется для вычисления случайной величины $\eta=\xi_1$. Критерием отбора является очевидное неравенство:



$$\xi_2 \le w_\eta(\xi_1) \tag{7}$$

Пары случайных чисел, удовлетворяющие этому условию, можно рассматривать как координаты случайных чисел на плоскости, равномерно распределенных вдоль осей y и $w_\eta(y)$. Вероятность того, что случайная точка на плоскости, попавшая под кривую $w_\eta(y)$, окажется в элементарной полосе с основанием $[y, y+\Delta y]$ равна, очевидно, площади этой полосы, т.е. $w_\eta(y)\Delta y$. Это и есть условие необходимое для того, чтобы случайная величина $\eta = a+(b-a)\xi_1$ имела заданную плотность распределения вероятности $w_\eta(y)$. Таким образом, алгоритм получения последовательности случайных чисел, обладающих исходной плотностью, может быть сформулирован следующим образом:

1. Из исходной совокупности равномерно распределенных на интервале [0,1] чисел выбираем пары ξ_1, ξ_2.
2. Для этих чисел осуществляется проверка неравенства (7).
3. Если неравенство (7) справедливо то переходим к шагу 4. В противном случае к шагу 1.
4. Если неравенство выполняется, то очередное число определяется согласно следующему соотношению: $\eta = a+(b-a)\xi_1$.

Описанная выше процедура отбора случайных чисел может потребовать существенного числа вычислений, в основном за счет вычисления правой части неравенства (4). Кроме того, не все пара чисел ξ_1, ξ_2 будут удовлетворять (7) и, следовательно, некоторая часть этих пар будет отброшена. Это приводит к дополнительным затратам машинного времени.

4. Задания к лабораторной работе «Методы генерации случайных величин с произвольным законом распределения»

№	Распределение	Плотность распределения $w_\eta(y)$	Параметры распределения
1.	Хи-квадрат с n степенями свободы	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, 0<y<\infty$	n=2
2.	Логарифмически нормальное	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y^2}} \exp\left\{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, 0<y<\infty$	m=1 σ=0,3
3.	Хи-квадрат с n степенями свободы	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, 0<y<\infty$	n=1
4.	Симпсона	$\begin{cases} 0, -\infty<y<a \\ \frac{4(y-a)}{(b-a)^2}, a<y<\frac{a+b}{2} \\ \frac{4(b-y)}{(b-a)^2}, \frac{a+b}{2}<y<b \\ 0, b<y<\infty \end{cases}$	a=0 b=2
5.	Хи-квадрат с n степенями свободы	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}, 0<y<\infty$	n=4

6.	Хи-распределение с n степенями свободы	$\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} y^{n-1} e^{-y^2/2}, 0<y<\infty$	*n=1*
7.	Хи-распределение с n степенями свободы	$\frac{1}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)} y^{n-1} e^{-y^2/2}, 0<y<\infty$	*n=4*
8.	Гамма-распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} y^{\alpha} e^{-y/\beta}, 0<y<\infty$	*α=2* *β=1*
9.	Гамма-распределение	$\frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} y^{\alpha} e^{-y/\beta}, 0<y<\infty$	*α=3* *β=1*
10.	Накагами (m – распределение)	$\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m y^{2m-1} \exp\left\{-\frac{m}{\sigma^2}y^2\right\}, 0<y<\infty$	*m=0,5* *σ=1*
11.	Накагами (m – распределение)	$\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m y^{2m-1} \exp\left\{-\frac{m}{\sigma^2}y^2\right\}, 0<y<\infty$	*m=1* *σ=1*
12.	Накагами (m – распределение)	$\frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\sigma^2}\right)^m y^{2m-1} \exp\left\{-\frac{m}{\sigma^2}y^2\right\}, 0<y<\infty$	*m=2* *σ=1*
13.	Коши	$\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+(y-m)^2}, \lvert y\rvert<\infty$	*t=1* *m=1*
14.	Релея	$\frac{y}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}, 0<y<\infty$	*σ=1*
15.	Релея-Райса	$\frac{y}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y^2+m^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{my}{\sigma^2}\right), 0<y<\infty$	*m=1* *σ=1*
16.	Максвелла	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y^2}{\sigma^3}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}, 0<y<\infty$	*σ=1*
17.	Стьюдента (t-распределение) с m-степенями свободы	$\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \lvert y\rvert<\infty$	*m=2*
18.	Стьюдента (t-распределение) с m-степенями свободы	$\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi m}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \lvert y\rvert<\infty$	*m=4*
19.	Эрланга k-го порядка	$\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} y^k e^{-\lambda y}, 0<y<\infty$	*λ=2* *k=0*
20.	Эрланга k-го порядка	$\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} y^k e^{-\lambda y}, 0<y<\infty$	*λ=2* *k=1*
21.	Эрланга k-го порядка	$\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} y^k e^{-\lambda y}, 0<y<\infty$	*λ=2* *k=3*
22.	Вейбулла	$c\alpha\, y^{\alpha-1}\exp\left\{-cy^{\alpha}\right\}, 0<y<\infty$	*α=1.5* *c=1*

23.	Вейбулла	$c\alpha\, y^{\alpha-1} \exp\{-cy^{\alpha}\}, 0 < y < \infty$	*α=2* *c=1*
24.	Вейбулла	$c\alpha\, y^{\alpha-1} \exp\{-cy^{\alpha}\}, 0 < y < \infty$	*α=3* *c=1*
25.	Мизеса	$\frac{1}{2\pi\, I_0(D)} \exp\{D \cos y\}, -\pi < y < \pi$	*D=3*

В соответствии с номером варианта необходимо сгенерировать выборку случайных чисел с заданным законом распределения двумя из рассмотренных теоретических методов. Отказ от использования метода обратной функции должен быть обоснован.

В качестве примера используйте файл LAB1.M, размещенный в папке Лабораторные работы по моделированию РТС на Рабочем Столе. Рекомендуется создать копию этого файла под своим именем в каталоге \MATLAB\WORK для модификации программы в соответствии с заданием.

Отчет по лабораторной работе должен включать:

1. Результаты теоретического исследования заданной плотности распределения и обоснование выбора методов генерации случайных чисел.
2. Листинг программы и графики полученных результатов моделирования.
3. Выводы по работе.