

2. Математическое моделирование радиосигналов и помех

2.1. Моделирование непрерывных детерминированных сигналов.

Использование ЦЭВМ в качестве основного инструмента математического моделирования приводит к необходимости реализации моделей сигналов и помех в дискретном времени. Поэтому задачу моделирования непрерывных детерминированных сигналов сформулируем как задачу отыскания алгоритмов, позволяющих формировать на ЭВМ их дискретные реализации без потери информации об исходном сигнале. Здесь слова «без потери информации» означают, что модель сохраняет все свойства непрерывного сигнала, и этот сигнал может быть однозначно восстановлен по своей модели.

Пусть требуется смоделировать детерминированный (неслучайный) радиосигнал

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0], \quad -\infty < t < \infty \quad (2.1)$$

где $a(t)$ - закон амплитудной модуляции, $\varphi(t)$ - закон фазовой модуляции, $\omega_0 = 2\pi f_0$ - круговая несущая частота, φ_0 - начальная фаза. Форма представления сигнала (2.1) называется *временной*. Альтернативной ей является *частотная* форма

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.2)$$

где $S(\omega)$ - *спектральная функция* сигнала. Между функциями $s(t)$ и $S(\omega)$ существует взаимнооднозначное соответствие

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} dt, \quad (2.3)$$

Равенства (2.2) и (2.3) составляют пару (прямое и обратное) преобразований Фурье. Оба представления сигнала в силу взаимной однозначности полностью эквивалентны. Выбор между ними осуществляется, исходя из специфики конкретной задачи. На рис. 2.1 в качестве примера приведены временная и частотная формы представления радиоимпульса с трапецевидной спектральной функцией.

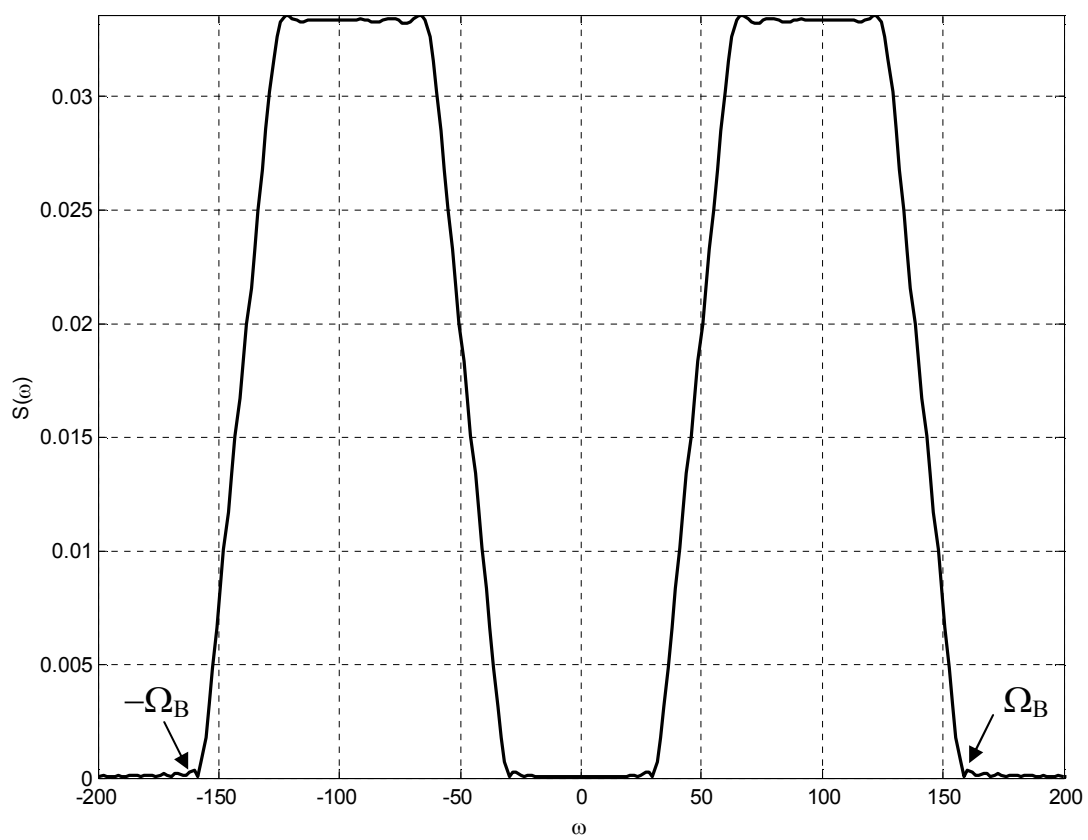
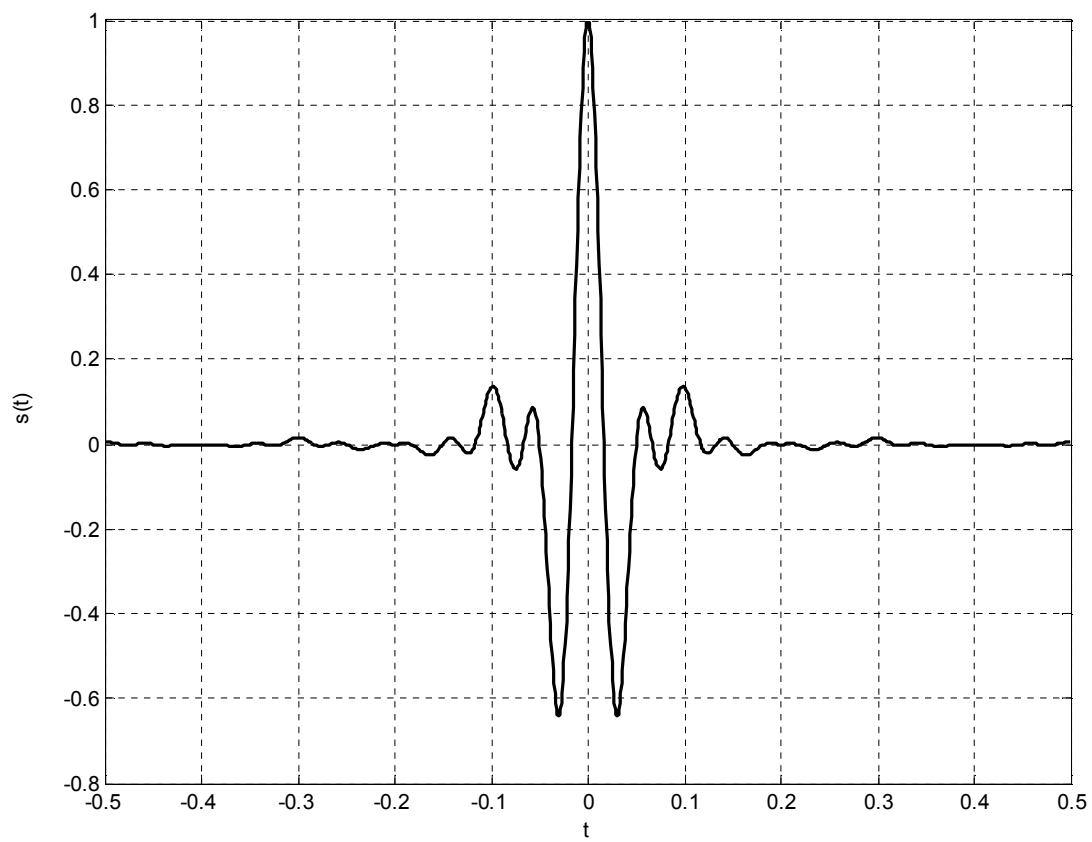


Рис. 2.1

Цифровой (дискретной) моделью сигнала $s(t)$ можно считать совокупность отсчетов, взятых с некоторым интервалом T

$$s[n] = s(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Интервал T называется *периодом дискретизации (ПД)*. При этом на некотором интервале наблюдения $[0, T_n]$ сигнал будет представляться в виде вектора конечной длины $\mathbf{s} = (s[0], \dots, s[N-1])^T$, где $(\cdot)^T$ - оператор транспонирования; $N = [T_n/T] + 1$ - длина вектора. Увеличивая ПД T , можно уменьшить длину N . Однако увеличивать T сверх некоторого предела нельзя, т.к. при этом будет утрачена возможность восстановления непрерывного сигнала $s(t)$ по вектору отсчетов \mathbf{s} . Действительно, согласно теореме Котельникова сигнал с ограниченным на интервале $[-\Omega_B, \Omega_B]$ спектром может быть представлен в виде следующего ряда

$$s(t) = \frac{\Omega_B T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \frac{\sin[\Omega_B(t - nT)]}{[\Omega_B(t - nT)]} \quad (2.5)$$

Зная отсчеты сигнала $s(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, на основе (2.5) можно восстановить значение сигнала в произвольный момент времени, если ПД удовлетворяет критерию Найквиста-Котельникова

$$T \leq \frac{1}{2F_B} \quad (2.6)$$

где $F_B = \Omega_B/2\pi$ - верхняя частота спектра сигнала. При нарушении критерия (2.6) восстановление сигнала по его дискретным отсчетам становится невозможным. Причиной этому является *эффект наложения*. Дело в том, что спектральная функция последовательности отсчетов сигнала $s(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ может быть записана в виде

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) \quad (2.7)$$

и является периодической функцией с периодом $\Omega = 2\pi/T$.

На рис. 2.2 представлен дискретизированный во времени радиоимпульс с трапецевидной спектральной функцией (см. рис. 2.1) и его спектр при $\Omega_B > \Omega - \Omega_B$.

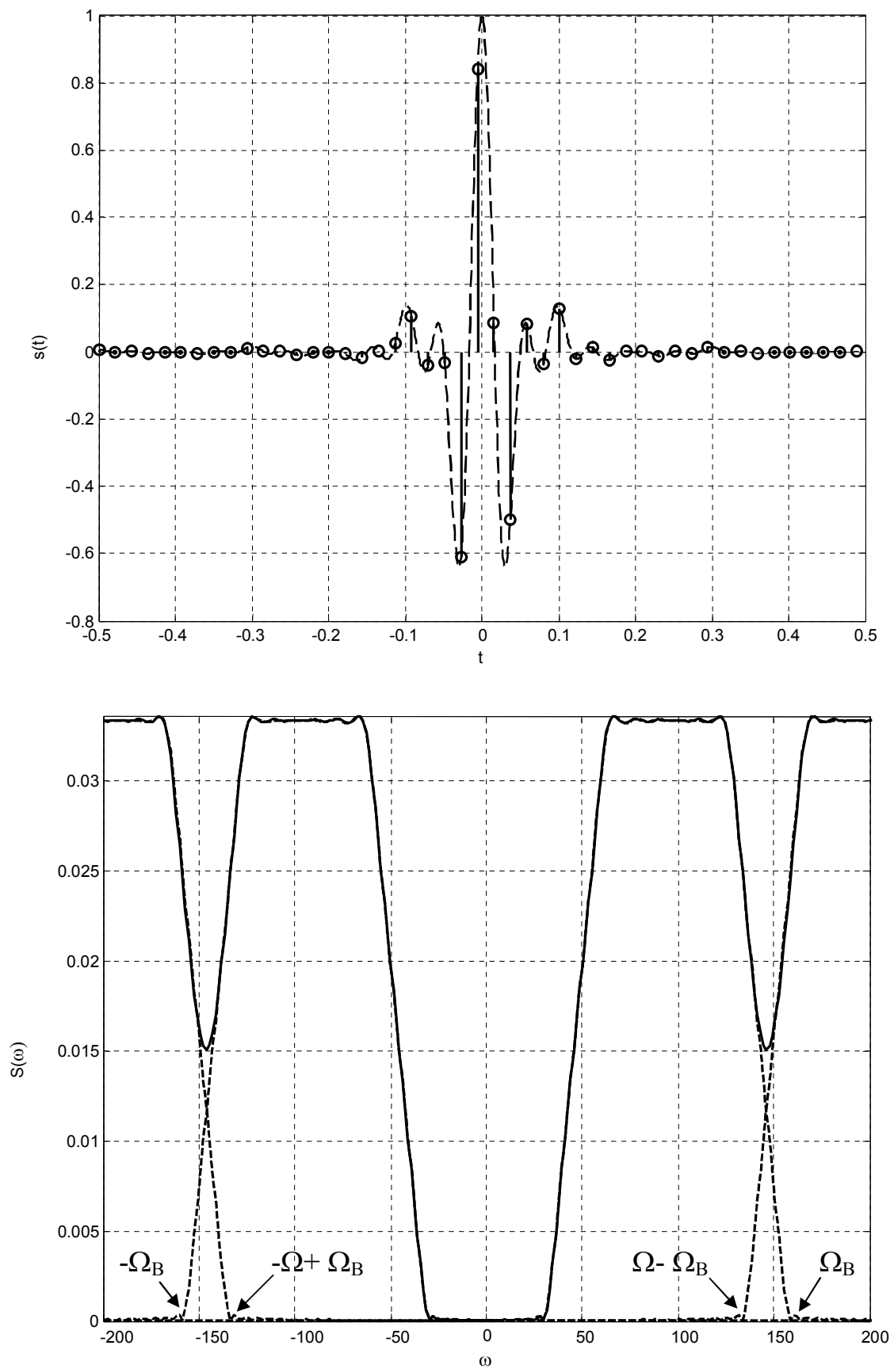


Рис. 2.2

Из рисунка видно, что в областях частот $[-\Omega_B, -\Omega + \Omega_B]$ и $[\Omega_B, \Omega - \Omega_B]$ верхняя боковая полоса одного периода накладывается на нижнюю боковую полосу другого периода функции $S(\omega)$. Происходит явление наложения, вследствие которого $\tilde{S}(\omega) \neq S(\omega)$ при $|\omega| \leq \Omega_B$. Спектр дискретной последовательности отсчетов сигнала $\tilde{S}(\omega)$ искажается по сравнению со спектральной функцией непрерывного сигнала. В то же время при выполнении условия $\Omega_B \leq \Omega - \Omega_B$ наложения не возникает, $\tilde{S}(\omega) = S(\omega)$ при $|\omega| \leq \Omega_B$, и восстановление оказывается возможным. Условие $\Omega_B \leq \Omega - \Omega_B$ и приводит к критерию (2.6).

Таким образом, модель сигнала $s(t)$ может быть образована из отсчетов сигнала, взятых с периодом дискретизации, удовлетворяющим условию Найквиста-Котельникова (2.6). Такой метод моделирования сигналов называется *методом несущей*. Достоинством метода является его простота. Однако методу присущ серьезный недостаток – он требует выделения большого объема памяти ЭВМ для представления сигналов.

Действительно, при высокой несущей частоте ω_0 ($\omega_0 \gg \Delta\Omega$, $\Delta\Omega$ – ширина спектра сигнала) $\Omega_B \approx \omega_0 + \Delta\Omega/2$, и ПД должен быть меньше половины периода несущей частоты. Столь малый ПД делает необходимым генерацию и запоминание большого числа отсчетов сигнала N . Поэтому при моделировании ВЧ и СВЧ сигналов на интервалах времени значительно больших периода колебаний используют другой метод представления – *метод огибающей*.

Запишем сигнал (2.1) в виде

$$s(t) = u(t)\cos\omega_0 t + v(t)\sin\omega_0 t \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} u(t) &= a(t)\cos[\varphi(t) + \varphi_0], \\ v(t) &= a(t)\sin[\varphi(t) + \varphi_0] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Процессы $u(t)$ и $v(t)$ называются *квадратурами сигнала* $s(t)$, а комплексный сигнал

$$w(t) = u(t) + iv(t) = a(t)\exp[\varphi(t) + \varphi_0] \quad (2.10)$$

называется *комплексной огибающей* сигнала. Сигнал $s(t)$ может быть восстановлен по своей комплексной огибающей $w(t)$ на основании следующего соотношения

$$s(t) = \operatorname{Re}\{w(t)e^{i\omega_0 t}\} = 0,5\{w(t)e^{i\omega_0 t} + w^*(t)e^{-i\omega_0 t}\} \quad (2.11)$$

где $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ - оператор взятия действительной части комплексного числа;
 $w^*(t) = u(t) - iv(t)$.

Возьмем преобразование Фурье от правой и левой частей уравнения (2.11). Получим

$$S(\omega) = 0,5\{W(\omega - \omega_0) + W^*(-\omega - \omega_0)\} \quad (2.12)$$

где $W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-i\omega t} dt$ - спектральная функция комплексной огибающей.

Допустим, что скорость изменения процессов $a(t)$ и $\varphi(t)$ значительно меньше, чем скорость изменения во времени гармонического сигнала $e^{-i\omega_0 t}$. Тогда, очевидно, ширина спектра сигналов $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ будет значительно меньше несущей частоты ω_0 . При этом функции $W(\omega - \omega_0)$ и $W^*(-\omega - \omega_0)$, разнесенные друг от друга по частоте на расстояние $2\omega_0$, не пересекаются. Тогда функция $W(\omega - \omega_0)$ может быть ассоциирована с частью спектра сигнала $S(\omega)$, сконцентрированной в окрестности частоты ω_0 в области положительных частот, а функция $W(-\omega - \omega_0)$ - с частью спектра $S(\omega)$, сконцентрированной в окрестности частоты $-\omega_0$ в области отрицательных частот (см. рис. 2.1). Примерный вид спектров $S(\omega)$ и $W(\omega)$ представлен на рис. 2.3.

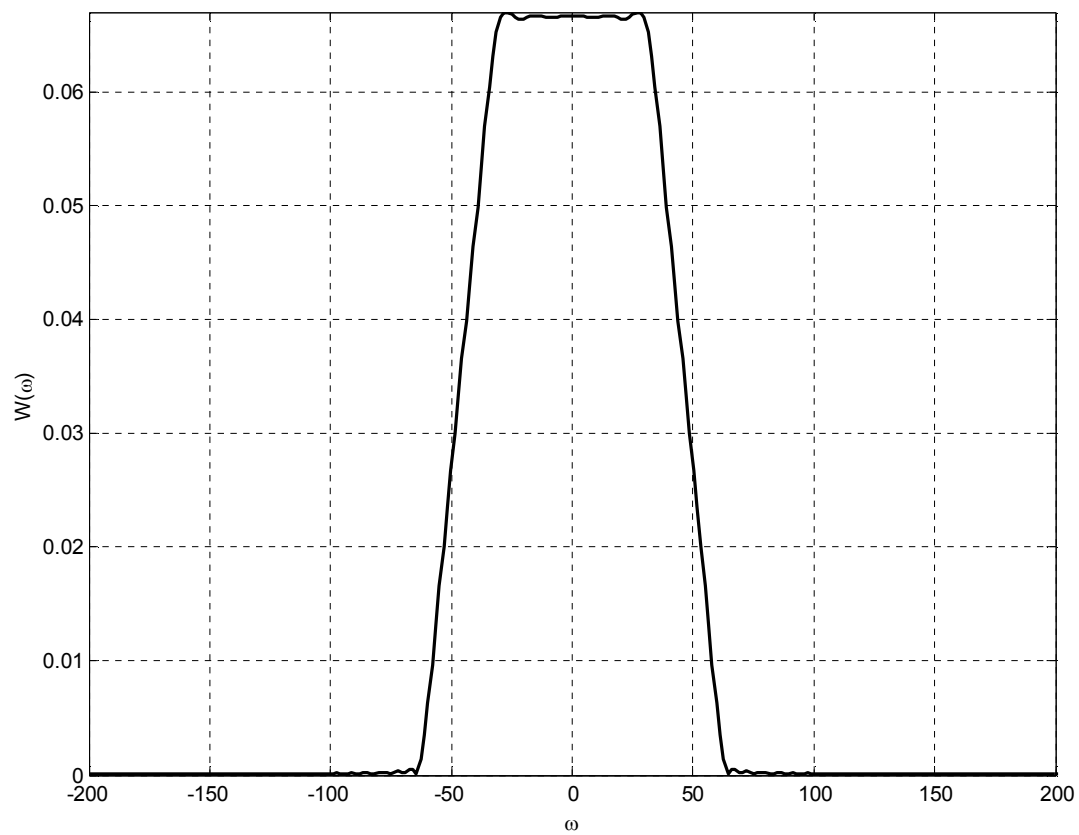
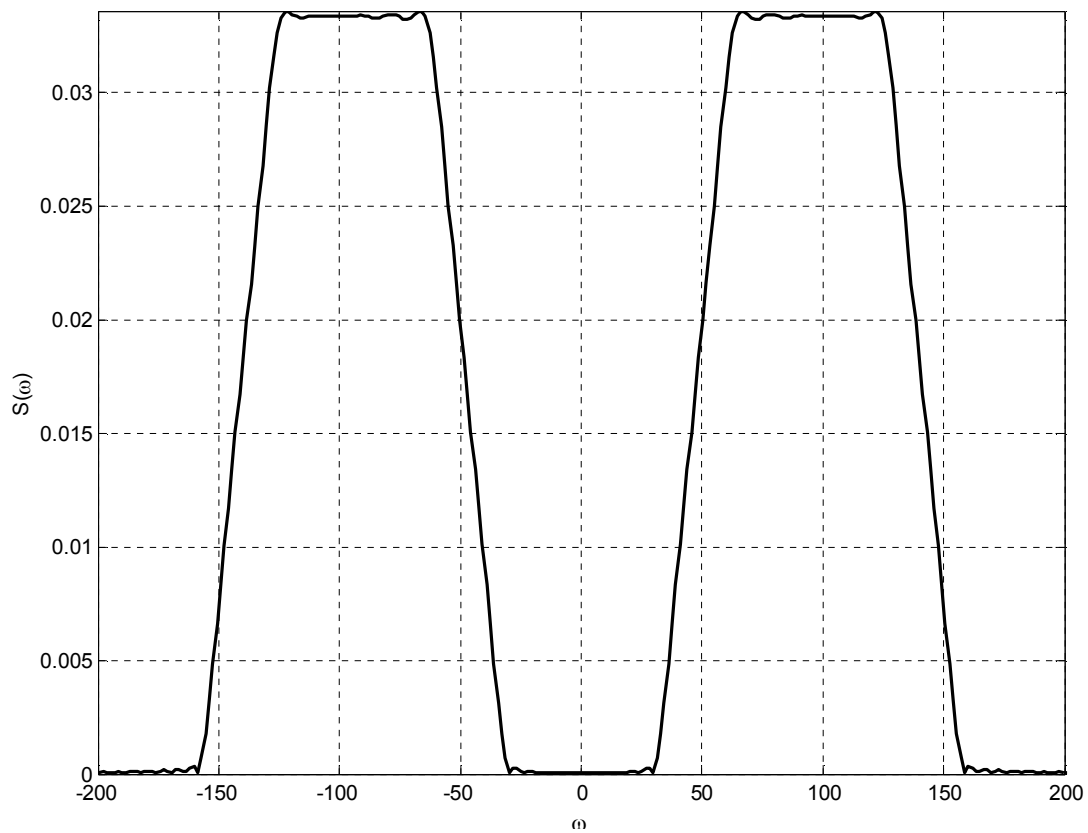


Рис. 2.3

Поскольку между $s(t)$ и $w(t)$ существует связь (2.11), а верхняя частота Ω_B спектра $W(\omega)$ значительно ниже несущей ω_0 ($\Omega_B \ll \omega_0$), сигнал $s(t)$ может быть представлен отсчетами своей комплексной огибающей $w[n] = w(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В данном случае ПД выбирается также на основании соотношения (2.6), однако участвующая в этом неравенстве частота $F_B = \Omega_B / 2\pi$ соответствует верхней частоте спектра комплексной огибающей $W(\omega)$. Поэтому при одинаковом времени наблюдения T_n количество отсчетов необходимых для представления в дискретном времени сигнала $w(t)$ значительно меньше количества отсчетов сигнала $s(t)$ по методу несущей. Метод представления сигнала $s(t)$ с помощью процесса $w(t)$ называется *методом огибающей*. Данный метод позволяет значительно сократить объем памяти ЭВМ, используемой для хранения сигнала $s(t)$ по сравнению с методом несущей. Однако данный метод имеет и недостаток: огибающая $w(t)$ является комплексным процессом, что делает необходимым хранение $N = 2[T_n/T - 1]$ отсчетов и использование при моделировании комплексной арифметики.

2.2. Моделирование радиосигналов со случайными параметрами

Сигнал $s(t, \lambda)$ называется *сигналом со случайными параметрами*, если λ - случайная величина (вектор), а закон изменения $s(t, \lambda)$ во времени известен, если известно значение случайного параметра λ . Поскольку параметры сигнала не изменяются во времени (изменения происходят лишь от реализации к реализации) методы моделирования сигнала $s(t, \lambda)$ принципиально ничем не отличаются от случая полностью детерминированного сигнала за исключением того, что при создании модели необходимо случайным образом изменять λ от опыта к опыту. Целью настоящего раздела является изложение методов генерации случайных величин с заданными законами распределения вероятностей.

2.2.1. Методы генерации случайных величин с равномерным на интервале $[0, 1]$ законом распределения

Получение случайных величин с равномерным на интервале $[0, 1]$ законом распределения является базовой операцией для генерации случайных величин с произвольным законом распределения. Случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $[0, 1]$, если ее плотность вероятности равна

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{при др. } x \end{cases} \quad (2.13)$$

Интегральная функция распределения ξ при этом имеет вид

$$F_{\xi}(x) = \Pr\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < \infty \end{cases} \quad (2.14)$$

где $\Pr\{\cdot\}$ - вероятность соответствующего события.

Графики функций $f_{\xi}(x)$ и $F_{\xi}(x)$ приведены на рис. 2.4.

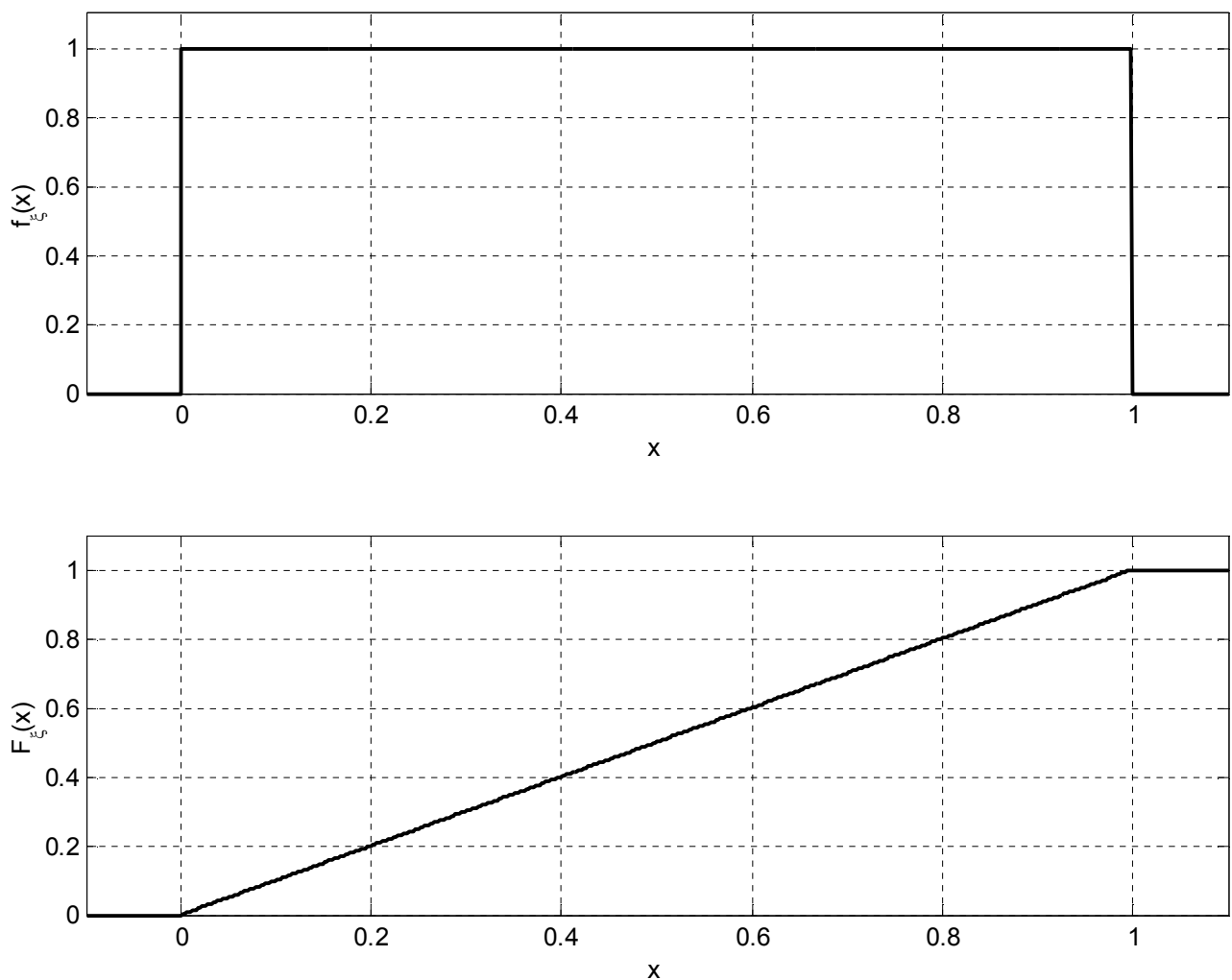


Рис. 2.4

Отметим, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны

$$E\{\xi\} = \frac{1}{2}, D\{\xi\} = \frac{1}{12} \quad (2.15)$$

До появления ЭВМ для получения случайных чисел с равномерным законом распределения использовались специальные математические таблицы или генераторы шума. В настоящее время созданы надежные способы генерации случайных чисел на ЭВМ.

Пусть даны два числа m и M , причем $m \leq p$, p - разрядность процессора. Для получения последовательности случайных чисел ξ_1, ξ_2, \dots используется следующий алгоритм:

1-й шаг. Задается некоторое целое число u_0 , $0 \leq u_0 \leq 2^m$.

2-й шаг. По рекуррентному правилу

$$u_n = (Mu_{n-1}) \bmod(2^m), n = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

вычисляется случайное число u_n , $0 \leq u_n \leq 2^m$.

3-й шаг. Вычисляется

$$\xi_n = u_n \cdot 2^{-m}, n = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

В силу ограниченности разрядности процессора ЭВМ количество различных чисел $\{u_n\}$ также ограничено и не может превысить величины $2^p - 1$. Поэтому числа ξ_1, ξ_2, \dots правильнее было бы называть *псевдослучайными*, поскольку, как следует из анализа (2.16), эта последовательность будет периодической с периодом меньшим или равным 2^m . Более того, из-за конечности разрядной сетки процессора получающиеся числа будут представлять реализации дискретной, а не непрерывной случайной величины. Однако при больших p и m этими обстоятельствами можно пренебречь. Числа M и m выбирают заранее таким образом, чтобы получить последовательность псевдослучайных чисел максимальной длины и минимальной коррелированности соседних значений.

Очевидно, что получающаяся последовательность целиком определяется числом u_0 , которое называется *зерном* (*seed*). В ЭВМ это число может быть задано явно, или для его задания по умолчанию может использоваться внутренний таймер компьютера.

В связи с вышесказанным алгоритм генерации псевдослучайных чисел с равномерным в интервале $[0, 1]$ распределением может быть представлен в более простой рекуррентной форме

$$\xi_0 = u_0 \cdot 2^{-m}, \xi_n = \{M\xi_{n-1}\}, n = 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

где фигурные скобки $\{\cdot\}$ означают взятие дробной части произведения.

2.2.2. Методы генерации случайных величин с произвольным законом распределения

2.2.2.1. Метод обратных функций (метод нелинейного преобразования обратной функции распределения)

Этот метод основан на следующей теореме теории вероятностей: если имеется случайная величина η с плотностью распределения вероятности $f_\eta(y)$, то случайная величина ξ

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f_\eta(y) dy \quad (2.19)$$

имеет равномерный закон распределения на интервале $[0,1]$. Действительно, найдем вероятность $\Pr\{\xi < x\} = F_\xi(x)$, где x - некоторое действительное число из интервала $[0,1]$; $F_\xi(x)$ - интегральная функция распределения случайной величины ξ . Для этого заметим, что интеграл, стоящий в правой части (2.19) равен интегральной функции распределения случайной величины η

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^y f_\eta(y) dy \quad (2.20)$$

и в силу того, что $f_\eta(y) \geq 0$, является возрастающей функцией верхнего предела y . Тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$F_\xi(x) = \Pr\{\xi < x\} = \Pr\{F_\eta(\eta) < x\} = \Pr\{\eta < F_\eta^{-1}(x)\} = F(F_\eta^{-1}(x)) = x$$

где $F_\eta^{-1}(x)$ - функция обратная интегральной функции распределения $F_\eta(y)$.

Если $x < 0$, то поскольку интеграл в правой части (2.19) не может быть отрицательным, $\Pr\{\xi < x\} = 0$. Аналогично, если $x > 1$, то $\Pr\{\xi < x\} = 1$, т.к. значение этого интеграла не может быть больше единицы. Таким образом

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 < x < \infty \end{cases} \quad (2.21)$$

Следовательно, случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале $[0,1]$. Это дает возможность предложить следующий алгоритм генерации случайной величины с произвольным законом распределения:

1-й шаг. Генерируется случайная величина ξ с равномерным в интервале $[0,1]$ законом распределения.

2-й шаг. Искомая случайная величина η получается в результате следующих вычислений

$$\eta = F_{\eta}^{-1}(\xi) \quad (2.22)$$

где $F_{\eta}^{-1}(x)$ - функция обратная интегральной функции распределения $F_{\eta}(y)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Необходимо получить случайные числа η_i с плотностью распределения вероятности $f_{\eta}(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$ и интегральной функцией вероятности $F_{\eta}(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$.

Согласно теореме $\xi_i = \lambda \int_0^{\eta_i} e^{-\lambda y} dy$. Тогда $\xi_i = W_{\eta}(y_i) = 1 - e^{-\lambda \eta_i}$. Находим обратную функцию: $\eta_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi_i)$. Число ξ_i распределено равномерно на интервале $[0,1]$. Тогда и разность $1 - \xi_i$ распределена равномерно на том же интервале. Поэтому последнее выражение можно упростить: $\eta_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \xi_i$.

Пример 2. Необходимо получить случайные числа η_i с равномерным в интервале $[a,b]$ распределением. В этом случае $F_{\eta}(\eta_i) = \frac{\eta_i - a}{b - a}$. Обратная функция $\eta_i = a + (b - a)\xi_i$.

Пример 3. Необходимо получить случайные числа η_i , распределенные по закону Релея. У такого случайного числа плотность распределения вероятности и интегральная функция вероятности имеют соответственно вид

$$f_{\eta}(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0, \quad F_{\eta}(y) = 1 - e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0.$$

Случайные числа η_i можно получить путем следующего преобразования равномерно распределенных в интервале $[0,1]$ случайных чисел ξ_i : $\eta_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(1 - \xi_i)}$ или $\eta_i = \sigma \sqrt{-2 \ln(\xi_i)}$.

Недостатки рассмотренного метода заключаются в том, что

- иногда трудно найти обратную функцию (не берется интеграл в (2.19)),
- требуется достаточный расход машинного времени на вычисление обратной функции F_{η}^{-1} , которая, как правило, является сложной.

2.2.2.2. Метод кусочной аппроксимации плотности распределения вероятности (Метод Н. П. Бусленко)

Суть метода состоит в замене плотности распределения вероятности ступенчатой функцией – набором K прямоугольников, вписанных в нее и имеющих одинаковые площади.

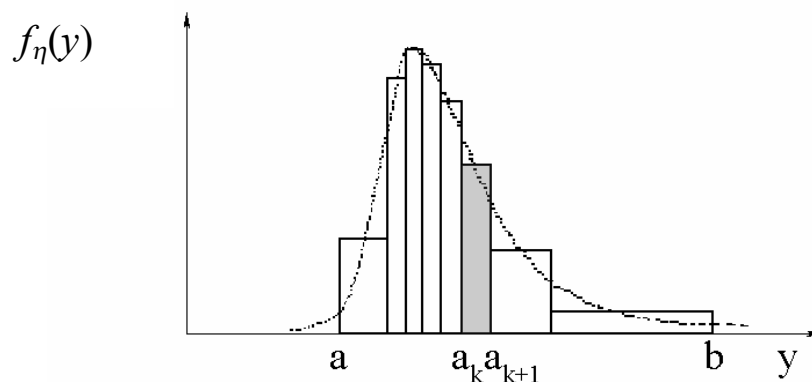


Рис. 2.5

Предварительно перед аппроксимацией плотность распределения вероятности подвергается усечению в хвостах на интервале $[a, b]$.

Площади K прямоугольников должны быть одинаковыми и равными $1/K$. Выделим прямоугольник с основанием $[a_k, a_{k+1}]$, его площадь

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_{\eta}(y) dy = \frac{1}{K} \quad (2.23)$$

На основании (2.23) последовательно вычисляются значения $a_1 = a, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{K+1} \geq b$, начиная с точки a и заканчивая точкой b .

Алгоритм моделирования заключается в последовательности следующих действий:

1-й шаг. Генерируется равномерно распределенное на интервале $[0, 1]$ случайное число ξ_1 .

2-й шаг. С помощью этого числа определяется номер $k = [(K - 1)\xi_1 + 1]$, где $[\cdot]$ - оператор округления до ближайшего целого. Таким образом, выделяется интервал $[a_k, a_{k+1}]$.

3-й шаг. Генерируется следующее число ξ_2 , равномерно распределенное на интервале $[0,1]$.

4-й шаг. Вычисляется случайное число $\tilde{\eta} = a_k + (a_{k+1} - a_k)\xi_2$. Число $\tilde{\eta}$ является реализацией случайной величины с заданным законом распределения.

Рассмотренный метод удобен при небольших K (до 64).

Докажем правильность данного алгоритма. Для этого рассмотрим интегральную функцию распределения случайной величины $\tilde{\eta}$

$$F_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \Pr\{\tilde{\eta} < \tilde{y}\} = \sum_{k=1}^K \Pr\{\tilde{\eta} < \tilde{y} \mid a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}\} \Pr\{a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}\}$$

Учитывая, что $\Pr\{a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}\} = 1/K$, а $\tilde{\eta} = a_k + (a_{k+1} - a_k)\xi_2$ при $a_k \leq \xi_1 < a_{k+1}$, получим

$$F_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Pr\left\{\xi_2 < \frac{\tilde{y} - a_k}{a_{k+1} - a_k}\right\} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \int_0^{\frac{\tilde{y} - a_k}{a_{k+1} - a_k}} f_{\xi}(x) dx$$

В силу свойств функции $f_{\xi}(x)$ все интегралы под знаком суммы равны нулю за исключением одного с индексом m , для которого интервал $[a_m, a_{m+1}]$ содержит точку \tilde{y} . Тогда

$$F_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \frac{1}{K} \left\{ (m-1) + \frac{\tilde{y} - a_m}{a_{m+1} - a_m} \right\}, a_m \leq \tilde{y} < a_{m+1}$$

Дифференцируя данное равенство, получим плотность распределения случайной величины $\tilde{\eta}$

$$f_{\tilde{\eta}}(\tilde{y}) = \frac{1}{K(a_{m+1} - a_m)} = \frac{1}{(a_{m+1} - a_m)} \int_{a_m}^{a_{m+1}} f_{\eta}(y) dy = f_{\eta}(y)$$

где y - некоторая точка из интервала $[a_m, a_{m+1}]$, причем в общем случае $\tilde{y} \neq y$. Последнее равенство записано на основании теоремы о среднем (теоремы Лагранжа). Следовательно, при малой протяженности интервалов, на которые делился интервал $[a, b]$, плотности распределения случайных величин $\tilde{\eta}$ и η совпадают с высокой точностью. Это доказывает правильность рассматриваемого алгоритма.

Достоинством метода Бусленко является малое число операций, не зависящее от K . Недостатком метода является то, что точность

аппроксимации плотности прямоугольниками не одинакова на всем интервале задания плотности $[a, b]$ и зависит от значения плотности $f_\eta(y)$. Чем меньше $f_\eta(y)$ на данном интервале, тем меньше точность, так как основание вписанного прямоугольника больше.

2.2.2.3. Метод отбора Неймана (метод отказов)

Этот метод также предполагает усечение плотности вероятности справа и слева на некотором интервале. Случайная величина η характеризуется плотностью распределения вероятности $f_\eta(y)$, которая усекается на интервале $[a, b]$.

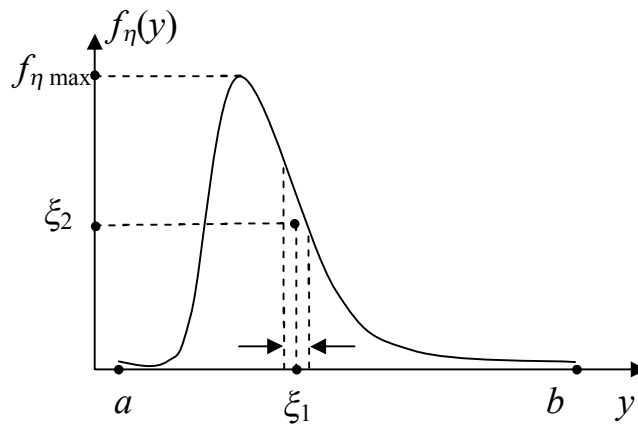


Рис. 2.6

Затем генерируются два равномерно распределенных случайных числа: ξ_1 и ξ_2 и осуществляется проверка, попадает ли точка с координатами $[a + (b - a)\xi_1, f_{\eta \max} \xi_2]$ под кривую плотности вероятности. Здесь $f_{\eta \max}$ - максимум плотности $f_\eta(y)$. Если это так, то запоминается первое число ξ_1 , которое и используется для вычисления значения случайной величины $\eta = \xi_1$. Если точка $[a + (b - a)\xi_1, f_{\eta \max} \xi_2]$ не попала под кривую плотности, генерируется новая пара ξ_1 и ξ_2 .

Докажем правильность рассматриваемого алгоритма. Критерием отбора пары ξ_1 и ξ_2 является очевидное неравенство (см. рис. 2.6)

$$\xi_2 \leq \frac{f_\eta(\xi_1)}{f_{\eta \max}} \quad (2.24)$$

Пары случайных чисел, удовлетворяющие этому условию, можно рассматривать как координаты случайных чисел на плоскости, равномерно

распределенных вдоль осей y и $f_\eta(y)$. Вероятность того, что случайная точка на плоскости, попавшая под кривую $f_\eta(y)$, окажется в элементарной полосе с основанием $[y, y + \Delta y]$ равна, очевидно, площади этой полосы, т.е. $f_\eta(y)\Delta y$.

Это и есть условие необходимое для того, чтобы случайная величина $\eta = a + (b - a)\xi_1$ имела заданную плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$.

Таким образом, алгоритм получения последовательности случайных чисел, обладающих заданной плотностью, может быть сформулирован следующим образом:

1-й шаг. Из исходной совокупности равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$ чисел выбираем пары ξ_1 и ξ_2 .

2-й шаг. Для этих чисел осуществляется проверка неравенства (2.24).

3-й шаг. Если неравенство (2.24) справедливо то переходим к шагу 4.

В противном случае к шагу 1.

4-й шаг. Если неравенство выполняется, то очередное число определяется согласно соотношению - $\eta = a + (b - a)\xi_1$.

Описанная выше процедура отбора случайных чисел может потребовать существенного числа вычислений, в основном за счет вычисления правой части неравенства (2.24). Кроме того, не все пары чисел ξ_1 и ξ_2 будут удовлетворять (2.24) и, следовательно, некоторая часть этих пар будет отброшена. Несложно показать, что вероятность быть отброшенной

для некоторой пары ξ_1 и ξ_2 равна $P_{отб} = \left(1 - \frac{1}{f_{\eta \max}(b - a)}\right)$. Очевидно, что с

увеличением площади прямоугольника, в который вписывается график плотности распределения вероятностей $f_\eta(y)$, эта вероятность быстро стремиться к единице. Большое количество отброшенных пар приводит к дополнительным затратам машинного времени.

2.2.2.4. Генерация дискретных случайных величин

Случайная величина η называется *дискретной*, если область ее значений – конечное или счетное множество $\{y_1, y_2, \dots\}$, т.е. множество все элементы которого можно перенумеровать. Закон распределения вероятностей задается множеством $\{p_1, p_2, \dots\}$, где $p_m = \Pr\{\eta = y_m\}$ - вероятность того, что в ходе эксперимента случайная величина примет значение y_m . Для данного множества вероятностей должно выполняться условие нормировки

$$\sum_m p_m = 1 \quad (2.25)$$

Алгоритм генерации значений случайной величины η включает в себя следующие шаги:

1-й шаг. Интервал $[0,1]$ разбивается точками $0 = a_0, a_1, a_2, \dots$ на отрезки длиной p_1, p_2, \dots . В силу (2.25) количество таких отрезков будет равно количеству значений случайной величины, а последний отрезок своим правым концом будет иметь граничную точку 1.

2-й шаг. Генерируется случайная величина ξ с равномерным на интервале $[0,1]$ распределением и определяется номер отрезка m , на который выпадает ξ .

3-й шаг. Значение случайной величины определяется как

$$\eta = y_m \quad (2.26)$$

Докажем, что алгоритм действительно дает нужный результат. Для этого определим вероятность $\Pr\{\eta = y_m\}$

$$\Pr\{\eta = y_m\} = \Pr\{a_m \leq \xi < a_{m+1}\} = a_{m+1} - a_m = p_m$$

Полученное равенство доказывает правильность алгоритма. Данный алгоритм позволяет генерировать дискретные случайные величины, число состояний которых может быть конечным или счетным бесконечным.

2.2.2.5. Моделирование случайных величин с нормальным законом распределения вероятностей

Нормальные случайные величины играют особую роль в теории вероятностей, математической статистике, физике, радиотехнике. Связано это с тем, что ошибки измерений для многих физических величин имеют плотность распределения вероятностей близкую к нормальной

$$g(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, |x| < \infty \quad (2.27)$$

где μ - математическое ожидание, σ^2 - дисперсия. Интегральная функция распределения равна

$$G(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right\} \quad (2.28)$$

где $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ - функция ошибок. В связи с тем, что $G(x)$ не

выражается через элементарные функции, метод обратной функции не может быть использован для генерации нормальных случайных величин. Поэтому в данном случае используются другие методы. Прежде чем приступить к их изложению, сделаем одно замечание. Назовем *стандартной* нормальную случайную величину ξ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Ее плотность распределения равна

$$g_0(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, |x| < \infty \quad (2.29)$$

Стандартную случайную величину простым линейным преобразованием

$$\eta = \sigma\xi + \mu \quad (2.30)$$

можно преобразовать в случайную величину с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать методы моделирования стандартной нормальной случайной величины.

Первый метод генерации использует установленный в теории вероятностей факт, что случайный вектор $\xi = (\xi_R, \xi_I)^T$, компонентами которого являются нормальные независимые случайные величины ξ_R и ξ_I с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, имеет длину $\rho = \sqrt{\xi_R^2 + \xi_I^2}$, распределенную по закону Релея, и фазу $\varphi = \arctg(\xi_I/\xi_R)$, равномерно распределенную на интервале $[0, 2\pi]$. Тогда случайные величины ξ_R и ξ_I могут быть получены из случайных величин ρ и φ простым переходом из полярной системы координат (ρ, φ) в декартову

$$\xi_R = \rho \cos \varphi, \xi_I = \rho \sin \varphi \quad (2.31)$$

Для генерации же ρ и φ может быть использован метод обратной функции (см. раздел 2.2.2.1, примеры 2, 3)

$$\rho = \sqrt{-2 \ln \xi_1}, \varphi = 2\pi\xi_2 \quad (2.32)$$

где ξ_1 и ξ_2 - независимые равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$ случайные величины.

Данный метод моделирования часто используется для генерации комплексных случайных величин, т.к. позволяет одновременно получать значения их действительной и мнимой частей. Недостатком данного метода

является необходимость вычислять значения четырех элементарных функций: \sin , \cos , \ln , $\sqrt{}$. Это значительно увеличивает время генерации.

При повышенных требованиях к быстродействию моделирующих программ используют второй метод, основанный на *центральной предельной теореме* теории вероятностей: распределение случайной величины

$$\xi = \frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n - \mu \right] \quad (2.33)$$

Полученной в результате суммирования независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, которые имеют произвольный закон распределения с

математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , при увеличении N стремится к стандартному нормальному распределению $g_0(x)$. Иными словами среднее арифметическое N произвольно распределенных

случайных величин $\eta = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n$ является при больших N нормальной

случайной величиной с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2/N .

Основываясь на этом факте, для генерации стандартной нормальной случайной величины используют $N = 8 \dots 12$ случайных величин с равномерным в интервале $[0,1]$ распределением. Удобно выбрать $N = 12$ и получить

$$\xi = \sum_{n=1}^{12} \xi_n - 6 \quad (2.34)$$

Число N можно уменьшить, если ввести специальную поправку

$$\xi = \tilde{\xi} + \frac{1}{20N} (\tilde{\xi}^3 - 3\tilde{\xi}) \quad (2.35)$$

где $\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{12}{N}} \sum_{n=1}^N \left(\xi_n - \frac{1}{2} \right)$. При использовании (2.35) N можно взять равным $5 \dots 7$.

Рассмотренный метод генерации значительно лучше по быстродействию, чем первый. Однако при этом величина ξ имеет ограниченную область значений. При необходимости воспроизведения больших выбросов ξ предпочтение следует отдать первому методу генерации.

2.2.3. Методы генерации случайных векторов

Вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T$ называется *случайным*, если его компоненты – случайные величины. В отсутствие статистической связи между компонентами генерация вектора $\boldsymbol{\eta}$ сводится к генерации M независимых случайных величин, и может быть проведена рассмотренными выше методами. Однако на практике чаще встречается случай, когда компоненты вектора зависимы. При этом задача моделирования значительно усложняется. Практическое использование при решении данной задачи нашли два метода – *метод условных вероятностей* и *обобщенный метод Неймана*.

2.2.3.1. Метод условных вероятностей

Случайный вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T$ считается полностью описанным с вероятностной точки зрения, если известна совместная M -мерная плотность распределения вероятностей $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$ или соответствующая ей интегральная функция распределения

$$F_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M) = \int_{-\infty}^{y_1} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{y_M} dy_M f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$$

Совместную плотность вероятности можно представить в виде

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M) = f_{\eta_1}(y_1) f_{\boldsymbol{\eta}_{1|\eta_1}}(y_2, \dots, y_M | y_1)$$

где $f_{\eta_1}(y_1)$ - безусловная плотность распределения случайной величины η_1 ; $f_{\boldsymbol{\eta}_{1|\eta_1}}(y_2, \dots, y_M | y_1)$ - условная плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_1 = (\eta_2, \dots, \eta_M)^T$ при условии, что $\eta_1 = y_1$. Эту условную плотность в свою очередь можно представить в виде произведения

$$f_{\boldsymbol{\eta}_{1|\eta_1}}(y_2, \dots, y_M | y_1) = f_{\eta_2|\eta_1}(y_2 | y_1) f_{\boldsymbol{\eta}_{2|\eta_1, \eta_2}}(y_3, \dots, y_M | y_1, y_2)$$

где $f_{\eta_2|\eta_1}(y_2 | y_1)$ - условная плотность распределения случайной величины η_2 при условии, что $\eta_1 = y_1$; $f_{\boldsymbol{\eta}_{2|\eta_1, \eta_2}}(y_3, \dots, y_M | y_1, y_2)$ - условная плотность распределения случайного вектора $\boldsymbol{\eta}_2 = (\eta_3, \dots, \eta_M)^T$ при условии, что $\eta_1 = y_1$, $\eta_2 = y_2$. Продолжая подобным образом, можно получить следующее представление M -мерная плотности в виде произведения M одномерных плотностей, $M - 1$ из которых являются условными

$$f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M) = f_{\eta_1}(y_1) \prod_{m=2}^M f_{\eta_m|\eta_1, \dots, \eta_{m-1}}(y_m|y_1, \dots, y_{m-1}) \quad (2.36)$$

Все входящие в правую часть (2.36) одномерные плотности можно получить интегрированием исходной M -мерная плотности

$$\begin{aligned} f_{\eta_1}(y_1) &= \int f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \dots, y_M) dy_2 \dots dy_M \\ f_{\eta_2|\eta_1}(y_2|y_1) &= \frac{1}{f_{\eta_1}(y_1)} \int f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \dots, y_M) dy_3 \dots dy_M \\ f_{\eta_3|\eta_1, \eta_2}(y_3|y_1, y_2) &= \frac{1}{f_{\eta_1}(y_1) f_{\eta_2|\eta_1}(y_2|y_1)} \int f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, y_2, \dots, y_M) dy_4 \dots dy_M \end{aligned}$$

и т.д.

На основании (2.36) можно предложить следующий алгоритм моделирования случайного вектора $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T$:

1-й шаг. По известной плотности $f_{\eta_1}(y_1)$ генерируется значение случайной величины η_1 ;

2-й шаг. По известной плотности $f_{\eta_2|\eta_1}(y_2|\eta_1)$ генерируется значение случайной величины η_2 ;

.....
m-й шаг. По известной плотности $f_{\eta_m|\eta_1, \dots, \eta_{m-1}}(y_m|\eta_1, \dots, \eta_{m-1})$

генерируется значение случайной величины η_m и т.д.

На каждом из M шагов моделируется соответствующая компонента вектора $\boldsymbol{\eta}$ при использовании любого из рассмотренным выше методов генерации одномерных случайных величин.

Данный метод является достаточно простым с точки зрения его программной реализации. Однако у него есть существенный недостаток – необходимость вычислять многомерные интегралы для определения условных плотностей распределения вероятностей.

2.2.3.2. Обобщенный метод Неймана

Данный метод, как следует из его названия, является непосредственным обобщением метода Неймана (см. раздел 2.2.2.3). Впишем плотность $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$ в некоторый $(M + 1)$ -мерный параллелепипед $\{a_1 \leq y_1 < b_1, \dots, a_M \leq y_M < b_M, 0 \leq f_{\boldsymbol{\eta}} \leq f_{\boldsymbol{\eta}_{\max}}\}$, где $f_{\boldsymbol{\eta}_{\max}}$ - максимальное значение функции $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$. Если плотность $f_{\boldsymbol{\eta}}(y_1, \dots, y_M)$ имеет бесконечные хвосты, то их необходимо усечь, причем сделать это следует так, чтобы

вероятность попадания случайного вектора $\boldsymbol{\eta}$ за пределы $(M + 1)$ -мерного параллелепипеда была пренебрежимо малой. Алгоритм моделирования $\boldsymbol{\eta}$ состоит в выполнении следующих шагов:

1-й шаг. Генерируется $M + 1$ независимая случайная величина $\{\eta_m\}_{m=1}^{M+1}$, из которых M первых равномерно распределены в интервалах $[a_1, b_1), \dots, [a_M, b_M)$, а η_{M+1} - равномерно распределена в интервале $[0, f_{\eta_{\max}})$, где $f_{\eta_{\max}}$ - максимальное значение плотности $f_{\eta}(y_1, \dots, y_M)$ в параллелепипеде.

2-й шаг. Если выполняется условие $\eta_{M+1} < f_{\eta}(\eta_1, \dots, \eta_M)$, то очередная реализация случайного вектора получается как

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_M)^T \quad (2.37)$$

3-й шаг. Если условие $\eta_{M+1} < f_{\eta}(\eta_1, \dots, \eta_M)$ не выполняется, то числа $\{\eta_m\}_{m=1}^{M+1}$ отбрасываются и необходимо перейти на шаг 1.

Данному методу присущи те же достоинства и недостатки, что имеет и скалярный метод Неймана. Однако количество отброшенных реализаций $\{\eta_m\}_{m=1}^{M+1}$ при $M \geq 2$ будет существенно больше. Действительно, несложно показать, что вероятность быть отброшенной для некоторой реализации равна $P_{\text{отб}} = (1 - 1/V)$, где V - объем $(M + 1)$ -мерного параллелепипеда.

2.2.3.3. Моделирование нормальных случайных векторов

Случайные векторы с нормальным законом распределения

$$f_{\eta}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} \sqrt{\det R}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T R^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \quad (2.38)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{\eta}$ - вектор математических ожиданий, а \mathbf{R}_{η} - корреляционная матрица, очень часто встречаются в задачах моделирования РТС. С задачей генерации случайных векторов можно встретиться при моделировании сигналов на выходе антенной решетки, содержащей M элементов, при моделировании обработки сигнальной пачки из M отсчетов и т.п.

Задача моделирования ставится так: пусть заданы $\boldsymbol{\mu}_{\eta}$ и \mathbf{R}_{η} , требуется найти алгоритм формирования случайного нормального вектора с заданным вектором математических ожиданий и корреляционной матрицей. В основе алгоритмов моделирования случайных нормальных векторов лежит следующая теорема теории вероятностей. Случайный вектор

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{a} \quad (2.39)$$

Полученный в результате линейного преобразования нормального случайного вектора ξ , также будет иметь нормальное распределение. Здесь \mathbf{A} и \mathbf{a} - неслучайные матрица и вектор соответственно.

Пусть ξ - случайный вектор, составленный из независимых стандартных нормальных случайных величин. При этом $\mu_\xi = \mathbf{0}$ и $\mathbf{R}_\xi = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} - единичная матрица. Найдем такую матрицу \mathbf{A} и вектор \mathbf{a} , чтобы η имел заданный вектор математических ожиданий μ_η и корреляционную матрицу \mathbf{R}_η . Начнем с отыскания вектора \mathbf{a} . Для этого найдем математическое ожидание обеих частей равенства (2.39)

$$\mu_\eta = E\{\eta\} = \mathbf{A}E\{\xi\} + \mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Следовательно, вектор $\mathbf{a} = \mu_\eta$.

Найдем теперь матрицу \mathbf{A} . Для этого представим $\eta - \mathbf{a} = \mathbf{A}\xi$ и для корреляционной матрицы \mathbf{R}_η получим

$$\mathbf{R}_\eta = E\{(\eta - \mathbf{a})(\eta - \mathbf{a})^T\} = E\{\mathbf{A}\xi\xi^T\mathbf{A}^T\} = \mathbf{A}E\{\xi\xi^T\}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

Следовательно, матрица \mathbf{A} должна находиться из условия

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{R}_\eta \quad (2.40)$$

Причем данная матрица может иметь любой вид. Если допустить, что матрица \mathbf{A} - нижняя треугольная (т.е. матрица все элементы, находящиеся выше главной диагонали, равны нулю)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{MM} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

то наша задача свелась к известному в линейной алгебре представлению симметрической матрицы \mathbf{R}_η в виде произведения двух треугольных матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^T . Такое представление называется *разложением Холецкого*. При этом элементы матрицы \mathbf{A} выражаются через элементы матрицы \mathbf{R}_η следующим образом

$$a_{11} = \sqrt{r_{11}}, a_{m1} = \frac{r_{m1}}{\sqrt{r_{11}}}, m = \overline{2, M},$$

$$a_{mm} = \left(r_{mm} - \sum_{n=1}^m a_{mn}^2 \right)^{1/2}, a_{mn} = \frac{1}{a_{mm}} \left(r_{mn} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{mk} r_{nk} \right) \quad (2.42)$$

где r_{mn} и a_{mn} - элементы матриц \mathbf{R}_η и \mathbf{A} , стоящие на пересечении m -й строки и n -го столбца. Для выполнения разложения Холецкого существуют соответствующие библиотечные подпрограммы.

Таким образом, алгоритм генерации нормального случайного вектора с заданным вектором математических ожиданий $\boldsymbol{\mu}_\eta$ и корреляционной матрицей \mathbf{R}_η имеет вид

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\mu}_\eta \quad (2.43)$$

где \mathbf{A} - матрица из разложения Холецкого для корреляционной матрицы, а $\boldsymbol{\xi}$ - вектор, составленный из независимых стандартных нормальных случайных величин.

2.3. Моделирование случайных процессов

Как отмечалось выше радиосигнал, являющийся носителем информации, весьма часто имеет случайный характер. То же самое можно сказать и про помехи и шумы, на фоне которых в РТС происходит обработка сигналов с целью выделения полезной информации. Поэтому моделирование случайных процессов – наиболее важная и часто встречающаяся задача, возникающая при моделировании РТС.

Для генерации случайных процессов хорошо разработаны алгоритмы получения стационарных гауссовских (нормальных) процессов и марковских процессов. Это объясняется математическими сложностями, возникающими при описании случайных процессов произвольной природы. Ограниченность методов генерации вышеназванными процессами не вызывает серьезных затруднений при моделировании РТС, поскольку именно гауссовские и марковские процессы являются наиболее близкими моделями случайных процессов, встречающихся на практике. Поэтому основное внимание в настоящем разделе будет уделено моделированию этих двух категорий случайных процессов. Если возникает необходимость генерации случайного процесса, который не может быть отнесен ни к одному из названных типов, то эту задачу решают приближенно. Один из методов приближенного решения рассмотрен в разделе 2.3.3.

2.3.1. Моделирование гауссовских случайных процессов с заданными корреляционными свойствами

2.3.1.1. Метод дискретного преобразования Фурье

Постановка задачи: требуется создать отрезок реализации комплексного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ длительности T_n , если известна его корреляционная функция (КФ) $R_\xi(\tau)$.

В соответствии с теоремой Винера – Хинчина спектральная плотность мощности (СПМ) случайного стационарного процесса $S_\xi(\omega)$ равна

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.44)$$

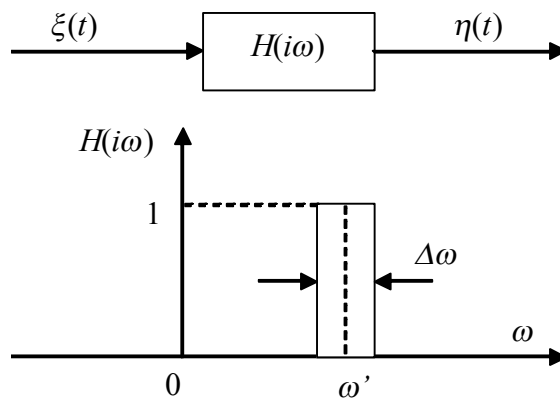


Рис. 2.7

Предположим, что процесс $\xi(t)$ поступает на вход узкополосного фильтра с прямоугольной частотной характеристикой, отличной от нуля в полосе частот $[\omega' - \Delta\omega/2, \omega' + \Delta\omega/2]$ (см. рис. 2.7), т.е.

$$H(i\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega - \omega'| \leq \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega - \omega'| > \Delta\omega/2 \end{cases}$$

где $\omega', \Delta\omega$ - средняя частота и ширина полосы пропускания фильтра. Тогда средняя мощность сигнала на выходе фильтра будет равна

$$P_{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) |H(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega' - \Delta\omega/2}^{\omega' + \Delta\omega/2} S_{\xi}(\omega) d\omega \quad (2.45)$$

Если функция $S_{\xi}(\omega)$ мало меняется в полосе частот $[\omega' - \Delta\omega/2, \omega' + \Delta\omega/2]$, то будет выполняться примерное равенство

$$P_{\eta} \approx S_{\xi}(\omega') \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (2.46)$$

причем (2.46) соблюдается тем точнее, чем меньше полоса $\Delta\omega$. Последнее уравнение определяет физический смысл функции $S_{\xi}(\omega)$: СПМ описывает распределение средней мощности случайного процесса $\xi(t)$ по частотам гармонических колебаний, входящих в его состав. Такая интерпретация СПМ и равенства (2.46) дает возможность предложить следующий метод генерации процесса $\xi(t)$. Разобьем частотную область на соприкасающиеся между собой полосы одинаковой ширины $\Delta\omega$. Средняя частота m -ой полосы равна $\omega_m = (m + 0,5)\Delta\omega$. Пусть величина $\Delta\omega$ взята настолько малой, что (2.46) выполняется с высокой точностью. Тогда сумму гармоник случайного процесса $\xi(t)$, попадающих в m -ю полосу, вследствие малости $\Delta\omega$ можно

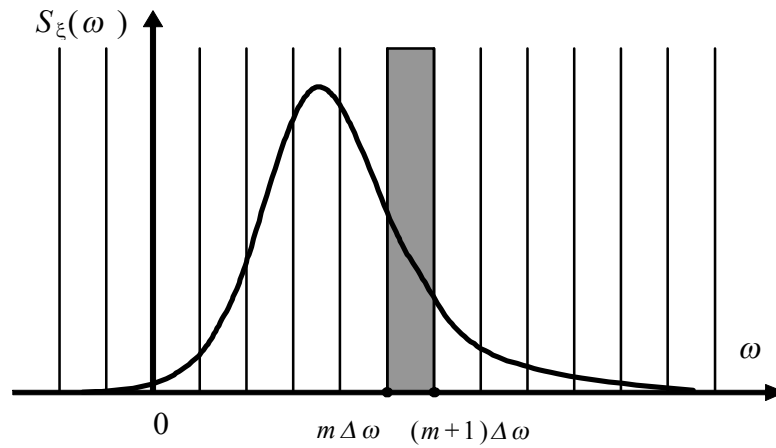


Рис. 2.8

заменить на одно гармоническое колебание частоты ω_m , которое имеет случайную амплитуду U_m и фазу φ_m . При этом для всего процесса будет справедливо следующее представление

$$\xi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m \exp\{i[\omega_m t + \varphi_m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{i\omega_m t} \quad (2.47)$$

где $x_m = U_m e^{i\varphi_m}$ - комплексная амплитуда m -й гармоники.

Из теории вероятностей известно, что сумма произвольного числа гауссовских случайных процессов также является гауссовской случайной величиной. Следовательно, поскольку процесс $\xi(t)$ - гауссовский, т.е. в любой момент времени t' случайная величина $\xi(t')$ распределена по нормальному закону, гармонические составляющие в правой части (2.47) также должны быть гауссовскими случайными процессами. Для этого достаточно, чтобы случайные величины U_m и φ_m при различных индексах m были независимы и имели соответственно плотность распределения Релея (U_m) и равномерную в интервале $[0, 2\pi]$ плотность (φ_m). Это требование эквивалентно тому, что амплитуды $x_m = U_m e^{i\varphi_m}$ должны быть комплексными гауссовскими случайными величинами, дисперсии которых D_m равны средней мощности процесса $\xi(t)$, приходящейся на m -ю полосу

$$D_m = \langle |x_m|^2 \rangle = S_\xi(\omega_m) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (2.48)$$

где треугольные скобки означают усреднение по ансамблю.

Если процесс $\xi(t)$ имеет ограниченный по частоте спектр, т.е. $S_\xi(\omega) = 0$ при $|\omega| > \Omega_B$, где Ω_B - верхняя частота спектра, то бесконечный ряд (2.47) можно заменить конечной суммой

$$\xi(t) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_m e^{i\omega_m t} \quad (2.49)$$

где $M \approx 2\Omega_B / \Delta\omega$ - количество гармоник, необходимое для моделирования случайного процесса. Тогда дискретные отсчеты процесса $\xi[n] = \xi(nT)$ во времени, взятые в соответствии с теоремой Котельникова с периодом дискретизации $T \leq \pi / \Omega_B$ могут быть получены как

$$\xi[n] = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} x_m e^{i \frac{2\pi}{N} nm} \quad (2.50)$$

где $\Delta\omega T = 2\pi / N$. Таким образом, отсчеты случайного процесса представляют собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности $\{x_m\}_{m=-M/2}^{M/2-1}$. Соответствующим выбором $\Delta\omega$ и T можно сделать N равным целой степени числа 2 ($N = 2^l \geq M$, где l - целое число). Это дает возможность использовать для вычисления (2.50) алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Окончательно алгоритм генерации случайного процесса методом дискретного преобразования Фурье может быть представлен последовательностью следующих шагов:

1-й шаг. На основании заданной КФ (или СПМ) процесса выбираются $\Delta\omega, T, N$ и M так, чтобы N было целой степенью числа 2 ($N = 2^l \geq M$).

2-й шаг. Генерируется массив из M независимых комплексных случайных чисел z_m с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

3-й шаг. Вычисляются комплексные амплитуды $x_m = \sqrt{D_m} z_m$, где D_m определяются в соответствии с (2.48).

4-й шаг. На основании (2.50) с использованием алгоритма БПФ вычисляются дискретные отсчеты случайного процесса $\xi[n]$.

2.3.1.2. Метод формирующего фильтра

Генерация нормального случайного процесса методом формирующего фильтра основывается на двух положениях теории случайных процессов:

- результатом произвольного линейного преобразования гауссовского случайного процесса также является случайный гауссовский процесс;
- спектральные плотности мощности случайных и процессов на входе и выходе линейного фильтра с частотной характеристикой $H(i\omega)$ связаны соотношением

$$S_{\text{вых}}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{\text{вх}}(\omega) \quad (2.51)$$

Если предположить, что на вход фильтра поступает процесс типа белого шума ($S_{\text{бш}}(\omega) = N_0/2, |\omega| < \infty$), то СПМ процесса на выходе будет равна

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(i\omega)|^2 \quad (2.52)$$

Следовательно, для формирования гауссовского случайного процесса с заданной СПМ $S_{\xi}(\omega)$ необходимо на вход фильтра с частотной характеристикой, модуль которой равен

$$|H(i\omega)| = \sqrt{S_{\xi}(\omega)} \quad (2.53)$$

подать белый шум с единичной спектральной плотностью $N_0/2 = 1$. При этом сигнал на выходе фильтра будет иметь нормальное распределение в силу первого из вышеназванных положений, т.к. фильтрация – операция линейная. Фильтр, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которого удовлетворяет (2.53), называется *формирующим*.

Равенство (2.53) дает возможность вычислить лишь АЧХ и не определяет его фазочастотную характеристику (ФЧХ). Поэтому этот вопрос остается открытым и требует дополнительного исследования.

Допустим, что ФЧХ фильтра $\varphi(\omega) = 0, |\omega| < \infty$. Тогда $H(i\omega) = |H(i\omega)|$ и импульсная характеристика фильтра равна

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)| e^{i\omega t} d\omega$$

Так как $h(t) = h(-t)$, т.е. $h(t) \neq 0$ при $t < 0$, фильтр является физически нереализуемым (в физически реализуемом фильтре $h(t) = 0$ при $t < 0$).

Данный пример свидетельствует о том, что ФЧХ формирующего фильтра не может быть произвольной, и ее выбор должен быть сделан таким образом, чтобы фильтр был физически реализуем. Синтез такого фильтра в общем случае сложен. Однако, если СПМ процесса – дробно-рациональная функция вида

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{b_M \omega^{2M} + b_{M-1} \omega^{2(M-1)} + \dots + b_0}{a_N \omega^{2N} + a_{N-1} \omega^{2(N-1)} + \dots + a_0} \quad (2.54)$$

где $b_m, m = \overline{0, M}$ и $a_n, n = \overline{0, N}$ – действительные числа ($N \geq M$), то процедура синтеза формирующего фильтра проста и состоит в следующем.

Из теории алгебраических уравнений известно, что неотрицательный полином степени $2K$ имеет лишь K пар комплексно сопряженных корней. Пусть $\alpha_n, \alpha_n^*, n = \overline{1, N}$ и $\beta_m, \beta_m^*, m = \overline{1, M}$ корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе (2.54) соответственно. Тогда (2.54) можно переписать

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{\prod_{m=1}^M (\omega - \beta_m) \prod_{m=1}^M (\omega - \beta_m^*)}{\prod_{n=1}^N (\omega - \alpha_n) \prod_{n=1}^N (\omega - \alpha_n^*)} \frac{b_M}{a_N} \quad (2.55)$$

Причем в силу того, что $S_{\xi}(\omega) \geq 0$, a_N и b_M – положительные числа, и обозначения корней $\alpha_n, \alpha_n^*, n = \overline{1, N}$ и $\beta_m, \beta_m^*, m = \overline{1, M}$ можно сделать такими, что α_n и β_m будут иметь положительные мнимые части

$$\text{Im}\{\alpha_n\} \geq 0, \text{Im}\{\beta_m\} \geq 0 \quad (2.56)$$

Сделаем в (2.55) замену переменной $\omega = -is$ в первой дроби и $\omega = is^*$ во второй (это возможно, т.к. ω – действительная переменная). Тогда

$$S_{\xi}(-is) = \frac{F(s)F(s^*)}{G(s)G(s^*)} = \frac{|F(s)|^2}{|G(s)|^2}, \quad (2.57)$$

где

$$F(s) = \sqrt{\frac{b_M}{a_N}} \prod_{m=1}^M (s - f_m) \quad (2.58)$$

$$G(s) = \prod_{n=1}^N (s - g_n) \quad (2.59)$$

$f_m = i\beta_m$, $g_n = i\alpha_n$. Вследствие условия (2.56) полиномы $F(s)$ и $G(s)$ имеют корни в левой полуплоскости комплексной переменной s . Поэтому, если взять в качестве частотной характеристики формирующего фильтра

$$H(s) = \frac{F(s)}{G(s)} \quad (2.60)$$

мы получим устойчивый реализуемый фильтр, АЧХ которого в силу (2.57) и (2.60) соответствует условию (2.53).

Таким образом, алгоритм моделирования гауссовского случайного процесса с заданными корреляционными (спектральными) свойствами состоит в пропускании реализации белого шума с единичной спектральной плотностью через линейный фильтр, частотная характеристика которого соответствует (2.60). Для успешного решения задачи моделирования методом формирующего фильтра необходимо, чтобы СПМ случайного процесса описывалась дробно-рациональной функцией от переменной ω вида (2.54). В ходе синтеза формирующего фильтра находят корни полиномов, стоящих в числителе и знаменателе (2.54), и приводят выражения для СПМ к виду (2.55). Затем определяют корни полиномов - α_n , $n = \overline{1, N}$ и β_m , $m = \overline{1, M}$, которые имеют положительные мнимые части (см. условие (2.56)), и составляют полиномы $F(s)$ и $G(s)$ в соответствии с (2.58) и (2.59). Частотная характеристика формирующего фильтра получается на основании (2.60). Необходимо заметить, что для получения отрезка случайного процесса с заданными свойствами на выходе формирующего фильтра необходимо, чтобы переходные процессы в фильтре закончились. Поэтому к сохранению выборки случайного процесса нужно перейти только после того, как модель проработала некоторое время на «холостом ходу». Обычно это время

оценивается как $(2..3)/\Delta f_{эф}$, где $\Delta f_{эф}$ - эффективная ширина полосы пропускания формирующего фильтра (см. ниже).

Полученный в ходе такого синтеза фильтр является аналоговым. Кроме того, белый шум, который подается на вход формирующего фильтра, также является «аналоговым» сигналом. Поэтому необходимо создать математические модели формирующего фильтра и белого шума. Первая задача - синтез математической модели формирующего аналогового фильтра, т.е. цифрового фильтра, рассмотрена в главе 3. Поэтому сейчас рассмотрим вопрос о генерации белого шума при цифровом моделировании.

Случайный процесс, который в научной литературе называется *белым шумом*, имеет спектральную плотность мощности $N_0/2$ постоянную во всей частотной области. Следовательно, его средняя мощность (дисперсия) бесконечна. Поэтому белый шум не является физически реальным процессом, а представляет собой удобную математическую абстракцию. При создании его цифровой модели необходимо сохранить два его основных свойства: постоянство СПМ в частотной области и статистическую независимость временных отсчетов, взятых в произвольные моменты времени. Второе свойство реализуется при моделировании весьма просто: за реализацию дискретного белого шума берется набор независимых случайных чисел, получающихся на выходе генератора случайных величин с нормальным законом распределения с нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией σ^2 . Очевидно, что величина этой дисперсии (т.е. средняя мощность процесса) должна быть каким-то образом связана со спектральной плотностью мощности «аналогового» белого шума $N_0/2$, дискретную модель которого мы создаем. Для того чтобы связать эти величины воспользуемся требованием постоянства СПМ в частотной области.

Известно, что при дискретизации непрерывного сигнала с периодом взятия отсчетов T , спектральная функция дискретизированного сигнала становится периодической с периодом $2\pi/T$. Поэтому, если СПМ нашего дискретного белого шума будет постоянна и равна $N_0/2$ на интервале $[-\pi/T, \pi/T]$, то автоматически она будет постоянна и во всей частотной области. С другой стороны, дисперсия случайного процесса с равномерной в указанном интервале СПМ равна (см. (2.45))

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{N_0}{2T}$$

Отсюда при $N_0/2 = 1$ получаем, что дисперсия независимых случайных чисел, составляющих реализацию дискретного белого шума должна быть равна

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \quad (2.61)$$

Следовательно, реализация дискретного белого шума размером в N отсчетов должна быть вычислена в соответствии со следующим равенством

$$\zeta[n] = \frac{1}{\sqrt{T}} z[n], \quad n = \overline{1, N} \quad (2.62)$$

где $z[n]$ – случайные независимые числа с нормальным стандартным распределением.

2.3.2. Моделирование марковских случайных процессов

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого M его M -мерная плотность распределения вероятностей может быть записана в виде

$$f_{\xi}(x_1, t_1; \dots; x_M, t_M) = f_1(x_1, t_1) \prod_{m=2}^M f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1}) \quad (2.63)$$

где $f_1(x_1, t_1)$ - безусловная (одномерная) плотность распределения;
 $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1})$ - условная плотность распределения отсчета процесса в момент времени t_m при условии, что $\xi(t_{m-1}) = x_{m-1}$. В теории марковских процессов плотность распределения $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1})$ называется *плотностью перехода*.

На основании (2.63) можно сказать, что Марковский случайный процесс задан, если известны безусловная плотность распределения $f_1(x_1, t_1)$ и плотность перехода $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1})$. Причем плотность распределения отсчета $\xi(t_m)$ зависит лишь от значения процесса в предыдущий момент времени. Последнее свойство является особенностью марковских процессов, которая выделяет их из общего числа случайных функций. Сравнение (2.63) с записью многомерной плотности вероятности (2.36) дает возможность предложить для моделирования марковских процессов метод условных плотностей (см. раздел 2.2.3.1), который при известных безусловной плотности и плотности перехода реализуется в данном случае весьма просто.

Среди множества марковских процессов особо выделяют диффузионные процессы. Марковский процесс называется *диффузионным*, если среди множества коэффициентов

$$\begin{aligned}
K_n(x,t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t^{-1} E \{ [\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^n | \xi(t) = x \} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t^{-1} \int (y-x)^n f_{m|m-1}(y, t+\Delta t | x, t) dy, \quad n=1,2,3,\dots
\end{aligned} \tag{2.64}$$

только первые два $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ отличны от нуля ($K_n(x,t) = 0, n \geq 3$).

Для диффузионного процесса плотность перехода удовлетворяет прямому

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t; x_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial t} [a(x,t) f(x,t; x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 t} [b(x,t) f(x,t; x_0, t_0)] \tag{2.65}$$

и обратному

$$\frac{\partial}{\partial t_0} f(x,t; x_0, t_0) = a(x_0, t_0) \frac{\partial}{\partial t_0} [f(x,t; x_0, t_0)] + \frac{1}{2} b(x_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial^2 t_0} [f(x,t; x_0, t_0)] \tag{2.66}$$

уравнениям Колмогорова. Здесь для плотности перехода введено обозначение $f_{m|m-1}(x_m, t_m | x_{m-1}, t_{m-1}) = f(x_m, t_m; x_{m-1}, t_{m-1})$.

Коэффициенты $a(x,t) = K_1(x,t)$ и $b(x,t) = K_2(x,t)$ называются соответственно *коэффициентом сноса* и *коэффициентом диффузии*. Коэффициент сноса $a(x,t)$ характеризует, как следует из (2.64), среднее значение локальной скорости изменения процесса $\xi(t)$, а коэффициент диффузии $b(x,t)$ - локальную скорость изменения дисперсии процесса. Зная $a(x,t)$ и $b(x,t)$, можно найти $f(x,t; x_0, t_0)$ и воспользоваться методом условных вероятностей для моделирования случайного диффузионного процесса. Однако даже для диффузионного процесса определить плотность перехода путем решения прямого или обратного уравнений Колмогорова бывает весьма сложно. Поэтому используют другой метод – метод формирующего фильтра.

Из теории марковских процессов известно, что при возбуждении нелинейного нестационарного фильтра, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)n(t) \tag{2.67}$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ детерминированные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов; $n(t)$ и $x(t)$ сигналы на входе и выходе, выходной сигнал $x(t)$ будет диффузионным процессом, если $n(t)$ - процесс типа белого шума. При этом оказывается, что функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$ связаны с

коэффициентами сноса $a(x,t)$ и диффузии $b(x,t)$ следующими соотношениями

$$f(x,t) = a(x,t), g(x,t) = \sqrt{\frac{2}{N_0} b(x,t)} \quad (2.68)$$

где $N_0/2$ - СПМ $n(t)$.

Отметим, что связь функций $f(x,t)$ и $g(x,t)$ с коэффициентами $a(x,t)$ и $b(x,t)$, выраженная соотношениями (2.68), справедлива, если дифференциальное уравнение (2.67) понимается в смысле Ито. Если уравнение (2.67) понимается в смысле Стратоновича, то связь между функциями $f(x,t)$, $g(x,t)$, $a(x,t)$ и $b(x,t)$ будет иметь вид

$$f(x,t) = a(x,t) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} b(x,t), g(x,t) = \sqrt{\frac{2}{N_0} b(x,t)} \quad (2.69)$$

Подробнее о свойствах стохастических дифференциальных уравнений можно узнать из книги В. И. Тихонова, В. Н. Харисова «Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем», учебн. пособие для вузов.- М.: Радио и связь, 1991. Для моделирования уравнения (2.67) на ЭВМ необходимо перейти к дискретному времени

$$x[m] - x[m-1] = T f(x[m-1], (m-1)T) + T g(x[m-1], (m-1)T) n[m], m = 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

где T - период дискретизации, $n[m]$ - дискретный белый гауссовский шум

$$n[m] = \frac{1}{T} \int_{t_m}^{t_m+T} n(t) dt \quad (2.71)$$

с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $N_0/2T$. Процесс (2.70) по сути является решением дифференциального уравнения (2.67) методом Эйлера, понимаемого в смысле Ито. При симметризованном уравнении (2.67) (уравнение Стратоновича) для решения следует использовать метод Рунге-Кутты. Описание методов Эйлера и Рунге-Кутты будет дано в главе 3.

2.3.3. Моделирование стационарных негауссовских процессов

В тех случаях, когда необходимо смоделировать стационарный негауссовский процесс, используют способ, который заключается в пропускании белого шума через линейный формирующий фильтр и нелинейное безынерционное звено (рис. 2.9)

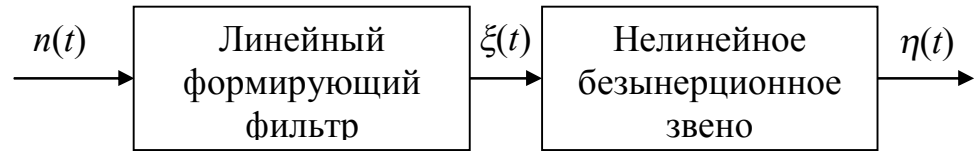


Рис. 2.9

При этом для решения задачи достаточно задать одномерную плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$ моделируемого случайного процесса $\eta(t)$ и его корреляционную функцию $R_\eta(\tau)$. Поскольку в общем случае одним и тем же функциям $f_\eta(y)$ и $R_\eta(\tau)$ может соответствовать бесконечное множество случайных процессов, отличающихся друг от друга многомерными плотностями распределения, то используемый метод, позволяющий создать выборку отсчетов с необходимыми свойствами, является приближенным.

Рассматриваемая задача решается в два этапа, сначала ищется вид нелинейности безынерционного звена, а затем находят частотную характеристику линейного формирующего фильтра.

Определим вид нелинейности. Поскольку белый шум подается сначала на линейный фильтр, процесс $\xi(t)$ будет гауссовским. Без потери общности можно считать, что его математическое ожидание равно нулю, а дисперсия – единице, т.е. процесс $\xi(t)$ - стандартный гауссовский, и его одномерная плотность распределения равна

$$f_\xi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, |x| < \infty \quad (2.72)$$

Допустим, что входной и выходной сигналы нелинейного безынерционного звена связаны функциональной зависимостью

$$\eta(t) = g(\xi(t)) \quad (2.73)$$

где $g(x)$ - некоторая функция, которую необходимо найти. Рассмотрим интегральную функцию распределения вероятностей процесса $\eta(t)$

$$F_\eta(y) = \Pr\{\eta < y\} = \Pr\{g(\xi) < y\}$$

Допустим, что $g(x)$ - неубывающая функция. Тогда для нее существует обратная функция $g^{-1}(x)$ и последнее равенство может быть записано в виде

$$F_{\eta}(y) = \Pr\{\xi < g^{-1}(y)\} = F_{\xi}(g^{-1}(y)) \quad (2.74)$$

где $F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ - интегральная функция стандартного нормального распределения. Вводя новую переменную $y = g(x)$ и дифференцируя (2.74), получим

$$f_{\eta}(g(x))g'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.75)$$

Уравнение (2.75) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $y = g(x)$, которое может быть решено если не аналитически, то численно. Таким образом определяется вид нелинейности безинерционного звена.

Найдем коэффициент передачи формирующего фильтра. В соответствии с определением корреляционная функция процесса $\eta(t)$ равна

$$R_{\eta}(\tau) = \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle = \iint g(x_1)g(x_2)f_{\xi}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

где $f_{\xi}(x_1, x_2)$ - двухмерная плотность распределения отсчетов случайного процесса $\xi(t)$ в моменты времени t и $t+\tau$. Учитывая, что $\xi(t)$ - стандартный гауссовский процесс

$$R_{\eta}(\tau) = \iint \frac{g(x_1)g(x_2)}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2(1-r^2)}\right\} dx_1dx_2 \quad (2.75)$$

где $r = r(\tau)$ - коэффициент корреляции (нормированная корреляционная функция) процесса $\xi(t)$. Для определения коэффициента передачи формирующего фильтра необходимо, как это следует из материалов предыдущих разделов, найти коэффициент корреляции $r(\tau)$, если не аналитически, то численно. Для этого выбирается момент τ , вычисляется $R_{\eta}(\tau)$ и ищется такое число r , которое удовлетворяет (2.75). В итоге получается последовательность значений $r(\tau)$ в заранее выбранных точках.

Процедуру нахождения $r(\tau)$ можно облегчить, если представить $f_\xi(x_1, x_2)$ в виде обратного преобразования Фурье от характеристической функции двумерного нормального распределения

$$f_\xi(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-0,5(q_1^2 + 2rq_1q_2 + q_2^2)} e^{i(x_1q_1 + x_2q_2)} dq_1 dq_2 \quad (2.76)$$

Подставляя (2.76) в (2.75) и раскладывая $e^{-rq_1q_2}$ в ряд Тейлора, получим

$$R_\eta(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-r)^k}{k!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^k G(q) e^{-0,5q^2} dq \right]^2 \quad (2.77)$$

где $G(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iqx} dx$ - преобразование Фурье функции $g(x)$. С

увеличением k , коэффициент $\frac{(-r)^k}{k!}$ убывает очень быстро. Поэтому, заменяя бесконечный ряд в (2.77) конечной суммой, получим уравнение

$$\sum_{k=0}^K c_k r^k(\tau) = R_\eta(\tau) \quad (2.78)$$

где $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^k G(q) e^{-0,5q^2} dq \right]^2$ независящие от $r(\tau)$ коэффициенты,

которые могут быть вычислены заранее после того, как найдена нелинейная функция $g(x)$. При фиксированном τ (2.78) является алгебраическим уравнением K -го порядка относительно неизвестного $r(\tau)$. Численные методы решения таких уравнений хорошо известны. Поэтому решить (2.78) и найти функцию $r(\tau)$ не представляет труда. После нахождения $r(\tau)$ можно воспользоваться рассмотренными методами генерации гауссовских случайных процессов и получить выборку отсчетов случайного процесса $\xi(t)$ нужной длины. После этого искомая выборка отсчетов процесса $\eta(t)$ получается как результат нелинейного преобразования отсчетов $\xi(t)$ в соответствии с (2.73).