

## 4. Обработка результатов математического моделирования

Как было отмечено во введении, особенностью радиотехнических систем является постоянное воздействие на них случайных факторов. Следовательно, результаты моделирования будут также носить случайный характер. Поэтому, принимая во внимание, что время эксперимента и объем полученных данных ограничены, необходимо так обрабатывать результаты, чтобы получаемые оценки наилучшим образом давали представление о свойствах и параметрах моделируемых устройств.

Поскольку, вследствие ограниченности полученных в ходе моделирования данных, можно говорить лишь об оценивании тех или иных свойств и параметров, необходимо определить какими качествами должны обладать эти оценки. Из теории статистического оценивания известно, что качество оценок определяется следующими показателями:

1. *Состоятельность*. Оценка  $\hat{\epsilon}$  называется *состоятельной*, если вероятность ее отклонения от истинного значения оцениваемого параметра  $x$  при увеличении размера выборки данных  $N$  стремится к нулю, т.е. выполняется следующее условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\{|\hat{\epsilon} - x| > \varepsilon\} = 0 \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon$  - произвольное, положительное, сколь угодно малое число. Смысл условия (4.1) состоит в том, что для состоятельной оценки при увеличении объема наблюдений значения оценки все ближе и ближе группируются вокруг истинного значения параметра.

2. *Смещенность*. Смещением  $b_{\hat{\epsilon}}$  оценки  $\hat{\epsilon}$  называется разность

$$b_{\hat{\epsilon}} = E\{\hat{\epsilon}\} - x \quad (4.2)$$

где  $E\{\hat{\epsilon}\}$  - математическое ожидание оценки. Оценка называется *несмещенной*, если  $b_{\hat{\epsilon}} = 0$ . Это означает, что центр группирования значений несмещенной оценки совпадает с истинным значением оцениваемого параметра.

3. *Эффективность*. При достаточно общих предположениях оказывается, что дисперсия оценки  $\hat{\epsilon}$  при фиксированном значении размера выборки  $N$  не может быть меньше, чем некоторая величина  $D_0$ , т.е.

$$D\{\hat{\epsilon}\} \geq D_0 \quad (4.3)$$

Условие (4.3) называется *неравенством Крамера – Рао*, а величина  $D_0$  - соответственно *границей Крамера – Рао*. Граница  $D_0$  может быть вычислена достаточно просто

$$D_0 = - \frac{\left(1 - \frac{\partial b_{\epsilon}}{\partial x}\right)^2}{E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(\mathbf{r}|x) \right\}} \quad (4.4)$$

где  $L(\mathbf{r}|x)$  - логарифм функции правдоподобия наблюдаемой выборки  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)^T$ ;  $E\{\cdot\}$  - оператор вычисления математического ожидания. За меру *эффективности* оценки  $\epsilon$  принимается величина

$$\epsilon = \frac{D_0}{D\{\epsilon\}} \quad (4.5)$$

В силу неравенства Крамера – Рао  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Оценка называется *эффективной*, если  $\epsilon = 1$ , т.е. ее дисперсия минимальна и равна границе Крамера – Рао.

При обработке результатов измерений следует стремиться к тому, чтобы использовать состоятельные, несмещенные и эффективные оценки, Это удастся далеко не всегда, Поэтому иногда вышеназванные требования смягчают, заменяя свойства несмещенности и эффективности соответствующими асимптотическими свойствами:

#### 4. Асимптотической несмещенностью

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_{\epsilon} = 0 \quad (4.6)$$

#### 5. Асимптотической эффективностью

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon = 1 \quad (4.7)$$

Рассмотрим теперь тот перечень задач, с которыми чаще всего встречается исследователь, осуществляющий обработку результатов измерений.

Обычно при обработке результатов машинного моделирования возникают следующие проблемы:

- определение эмпирического закона распределения вероятности оцениваемых в ходе эксперимента параметров;
- проверка совпадения эмпирического закона распределения вероятности с модельным распределением;

- оценка параметров распределения оцениваемого параметра.
- Рассмотрим, как решаются вышеназванные задачи.

#### 4.1. Оценка закона распределения вероятностей

Пусть в результате эксперимента для оцениваемого параметра  $x$  получен ряд оценок  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$ . Этот ряд называется выборкой объема (размера)  $N$ . Существуют два способа оценки эмпирического распределения вероятности оценки: оценка плотности распределения и оценка функции распределения.

При оценивании плотности распределения (дифференциальной функции) весь интервал возможных значений оценки  $\epsilon$  разбивают на  $K$  интервалов. Длины интервалов не обязательно должны быть равными. После получения выборки  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$  подсчитывают количество попаданий выборочных значений в каждый из  $K$  интервалов -  $m_k, k = \overline{1, K}$  и определяют частоты

$$v_k = \frac{m_k}{N}, k = \overline{1, K} \quad (4.8)$$

Если  $k$ -й интервал имел длину  $\Delta x_k$ , то за оценку значения плотности распределения  $f(x)$  на этом интервале берут

$$\hat{f}(x) = \frac{v_k}{\Delta x_k} = \frac{m_k}{N \Delta x_k}, x_{k-1} \leq x < x_k \quad (4.9)$$

где  $x_{k-1}$  и  $x_k$  - границы  $k$ -го интервала. Таким образом, оценка  $\hat{f}(x)$  имеет вид ступенчатой функции или *гистограммы*. Поэтому данный метод в литературе получил названия *метода гистограмм*. Можно показать, что полученная оценка является состоятельной, несмещенной и эффективной. Непростым вопросом при использовании метода гистограмм является выбор количества интервалов  $K$ . Считается, что для получения приемлемых результатов необходимо, чтобы в каждый интервал попало не менее 8 значений случайной величины  $\epsilon$ . Однако это требование сложно использовать для определения  $K$ . Существует эмпирическое *правило Штюргеса*, которое утверждает, что число интервалов гистограммы  $K$  и объем выборки  $N$  связаны следующим соотношением

$$K = 1 + 3,2 \lg N \quad (4.10)$$

Так при  $N = 1000$  получаем, что  $K \approx 10$ .

Обратимся теперь к оценке интегральной функции распределения. Расположим результаты эксперимента  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$  в порядке возрастания. Получим в результате т.н. *вариационный ряд*

$$\epsilon^{(1)} \leq \epsilon^{(2)} \leq \dots \leq \epsilon^{(N)} \quad (4.11)$$

Пусть  $x$  - неслучайная величина. Количество членов вариационного ряда (4.11) меньших  $x$  называется *эмпирической частотой*

$$v(x) = M, \epsilon^{(m)} < x, m = 1, \dots, M \quad (4.12)$$

*Эмпирической функцией распределения* называется функция

$$F(x) = \frac{v(x)}{N} = \begin{cases} 0, & x < \epsilon^{(1)} \\ M/N, & \epsilon^{(m)} \leq x < \epsilon^{(m+1)} \\ 1, & \epsilon^{(N)} \leq x \end{cases} \quad (4.13)$$

Функция  $F(x)$  имеет ступенчатый вид и изменяется от 0 до 1. Скачки функции приходятся на выборочные значения и их величина равна  $1/N$ . В математической статистике доказано, что  $F(x)$  - состоятельная и несмещенная оценка интегральной функции распределения.

## **4.2. Проверка соответствия выбранной модели распределения данным эксперимента**

Во многих случаях исследователь, проводивший математический эксперимент, с той или иной степенью уверенности может предположить, что наблюдаемая оценка  $\epsilon$  имеет некоторое модельное распределение вероятностей. В этом случае выборочные данные  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$  можно использовать для того, чтобы либо принять гипотезу о справедливости сделанного предположения, либо отвергнуть ее. Задача проверки соответствия выбранной модели распределения и данных эксперимента решается с помощью т.н. *критериев согласия*. Алгоритм проверки для всех критериев согласия следующий.

Пусть  $H_0$  - гипотеза о том, что полученное эмпирическое распределение выборки  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$  согласуется с некоторым модельным. Для подтверждения или отрицания гипотезы  $H_0$  выбирают некоторую функцию  $U$ , заданную на множестве эмпирических и модельных распределений. Величина  $U$ , вычисленная на полученном эмпирическом и выбранном модельном распределении, является случайной и называется *решающей статистикой*. В качестве решающей статистики нельзя брать

любую функцию, поскольку в общем случае ее распределение вероятности зависит и от фактического, и от модельного распределений. Однако при разработке методов согласия были найдены такие функции  $U$ , статистика которых практически не зависит от условий эксперимента и может быть определена заранее. При использовании такой решающей статистики процедура принятия гипотезы  $H_0$  состоит в проверке условия

$$U < U_0 \quad (4.14)$$

где  $U_0$  - порог сравнения, который вычисляется на основании решения одного из следующих уравнений

$$\Pr\{U \geq U_0\} = \alpha \text{ или } \Pr\{U < U_0\} = 1 - \alpha \quad (4.15)$$

В уравнениях (4.14) – (4.15) соответствующие вероятности вычисляются на основании известного распределения вероятностей решающей статистики  $U$ . Постоянная  $\alpha$ , которая называется *уровнем значимости*, выбирается заранее и устанавливает допустимую вероятность ошибки при проверке гипотезы  $H_0$ . Обычно  $\alpha = 0,05 \dots 0,1$ . В случае, если неравенство (4.14) не выполняется, гипотеза  $H_0$  отвергается, и исследователь должен предложить другую гипотезу о виде модельного распределения. Все существующие критерии согласия различаются по виду решающей статистики. Рассмотрим наиболее часто используемые критерии согласия.

#### 4.2.1. Критерий Пирсона

Разобьем область определения модельной плотности распределения вероятностей  $F(x)$  на  $K$  интервалов и обозначим вероятности попадания оценки  $\mathcal{X}$  в  $k$ -й интервал  $\Delta_k$  через  $p_k = \Pr\{\mathcal{X} \in \Delta_k\}$ . Согласно критерию Пирсона решающей статистикой является следующая мера расхождения модельного и эмпирического распределений

$$U = \sum_{k=1}^K \frac{(m_k - Np_k)^2}{Np_k} = N \sum_{k=1}^K \frac{(m_k/N - p_k)^2}{p_k} \quad (4.16)$$

где  $m_k$  - количество значений оценки, попавших в  $k$ -й интервал  $\Delta_k$

$$(\sum_{k=1}^K m_k = N).$$

Пирсон доказал следующую теорему. Если проверяемая гипотеза  $H_0$  об истинности модельного распределения  $F(x)$  верна, то при объеме выборки  $N \rightarrow \infty$  закон распределения решающей статистики  $U$  зависит

только от числа интервалов  $K$  и приближается асимптотически к закону распределения  $\chi^2$  (хи-квадрат) с  $s = K - J - 1$  степенями свободы, где  $J$  - число неизвестных параметров модельного распределения.

Выдвинув гипотезу  $H_0$  об истинности модельного распределения  $F(x)$ , мы тем самым устанавливаем, от какого числа параметров  $J$  оно зависит. Если значения всех или части параметров не известны, то они заменяются оценками. После определения оценок параметров модельной функции  $F(x)$  распределения вычисляются вероятности  $p_k = \Pr\{x \in \Delta_k\}$

$$p_k = F(x_{k+1}) - F(x_k), \Delta_k = x_{k+1} - x_k \quad (4.17)$$

попадания оценки в  $k$ -й интервал  $\Delta_k$ .

Из теоремы Пирсона следует, что какова бы ни была гипотетическая функция распределения вероятностей  $F(x)$  случайная величина  $U$  при  $N \rightarrow \infty$  имеет распределение  $\chi^2$

$$\Pr\{U < u\} = \frac{\Gamma(s/2, u/2)}{\Gamma(s/2)} \quad (4.18)$$

где  $\Gamma(s/2, u/2) = \int_0^{u/2} x^{s/2-1} e^{-x} dx$  - неполная, а  $\Gamma(s/2) = \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-x} dx$  - полная гамма - функции, которые могут быть вычислены либо численно, либо по таблицам.

Таким образом, процедура проверки гипотезы  $H_0$  согласно критерию Пирсона выглядит следующим образом:

1. Задаем значение доверительной вероятности  $P_0 = 1 - \alpha$  или уровня значимости  $\alpha$ . Обычно  $\alpha = 0,05 \dots 0,1$ .
2. По значению  $\alpha$  и числу степеней свободы  $s$  на основании (4.18) находим величину порога сравнения  $U_0$ .
3. На основании (4.16) и (4.17) вычисляем значение решающей статистики  $U$  и сравниваем его с порогом  $U_0$ . Если значение  $U$  меньше порога  $U_0$ , то гипотеза  $H_0$  принимается. Если  $U > U_0$ , то гипотеза отвергается.

Критерий Пирсона является одним из наиболее широко используемых на практике и дает хорошие результаты при объеме выборки  $N$  порядка 100 и выше. Недостатками критерия являются:

1. Необходимость иметь сравнительно большую выборку.
2. Произвольное разбиения области определения модельной плотности распределения вероятностей  $F(x)$  на  $K$  интервалов, которое не учитывает особенностей функции  $F(x)$ .

### 4.2.2. Критерий Колмогорова

Согласно этому критерию количественной мерой соответствия модельного  $F(x)$  и эмпирического  $\mathbb{F}(x)$  распределений вероятностей для выборки  $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \dots, \mathbb{X}_N$  объема  $N$  служит максимум их модуля разности

$$U = \max_x |F(x) - \mathbb{F}(x)| \quad (4.19)$$

Колмогоров доказал, что если проверяемая гипотеза  $H_0$  верна, то при  $N \rightarrow \infty$  и дополнительном предположении о непрерывности  $F(x)$  функция распределения величины  $\sqrt{N}U$  асимптотически стремится к функции Колмогорова

$$\Pr\{\sqrt{N}U < z\} = K(z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} \quad (4.20)$$

Представление (4.20) удобно использовать при  $z > 1$ , когда ряд сходится быстро. При  $z < 1$ , когда ряд в (4.20) сходится медленно, удобнее пользоваться другим представлением

$$K(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{8z^2}} \quad (4.21)$$

Таким образом, правило проверки гипотезы  $H_0$  согласно критерию Колмогорова таково:

1. Задаем значение доверительной вероятности  $P_0 = 1 - \alpha$  или уровня значимости  $\alpha$ . Обычно  $\alpha = 0,05 \dots 0,1$ .
2. По значению  $\alpha$  и числу степеней свободы  $s$  на основании (4.20) или (4.21) находим величину порога сравнения  $U_0$ .
3. На основании (4.19) вычисляем значение решающей статистики  $U$  и сравниваем его с порогом  $U_0$ . Если значение  $U$  меньше порога  $U_0$ , то гипотеза  $H_0$  принимается. Если  $U > U_0$ , то гипотеза отвергается.

Как и критерий Пирсона, критерий Колмогорова используется при достаточно больших объемах выборки ( $N = 50 \dots 80$ ). Однако при использовании этого критерия не требуется дополнительного разбиения области определения  $F(x)$  на интервалы.

### 4.2.3. Критерий Крамера – Мизеса

Согласно этому критерию количественной мерой соответствия для выборки объема  $N$  служит значение среднего значения квадрата отклонения модельного распределения от эмпирического

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - \mathbb{F}(x)]^2 f(x) dx \quad (4.22)$$

где  $f(x)$  - плотность распределения  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Подстановка (4.13) в (4.22)

и интегрирование позволяет получить другое выражение для решающей статистики

$$U = \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[ F(\mathbb{F}^{(n)}) - \frac{2n-1}{2N} \right]^2 \quad (4.23)$$

Для величины  $NU$  в математических таблицах можно найти предельное при  $N \rightarrow \infty$  распределение вероятностей, на основании которого по заданному уровню значимости  $\alpha$  можно определить величину порога сравнения  $U_0$ . Дальнейшая процедура использования критерия ничем не отличается от алгоритма использования критерия Колмогорова.

Критерий Крамера – Мизеса может использоваться при малых объемах выборки ( $N \leq 50$ ).

### 4.3. Оценка моментов распределения

Оценка эмпирического распределения и проверка его соответствия модельному распределению не являются единственными проблемами, возникающими при обработке результатов эксперимента. Обычно при обработке оценивают моменты распределения оценки  $\mathbb{F}$ . Как правило, при этом ограничиваются лишь первыми начальными или центрированными моментами. Оценка моментов распределения случайной величины  $\mathbb{F}$  позволяет не только определить центр группирования результатов измерений и меру их разброса, но и судить о качественном характере распределения вероятностей.

Для случайных величин в теории вероятностей вводятся начальные моменты

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x) dx, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

и центральные моменты



$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M_1)^p f(x) dx, p = 2, 3, \dots \quad (4.25)$$

где  $f(x)$  - плотность распределения оценки  $\mathcal{E}$ . Между семействами начальных и центрированных моментов существует взаимно однозначное соответствие.

Наибольшее применение нашли величины, связанные с первыми четырьмя моментами распределения.

#### 1. Математическое ожидание

$$\mu = M_1 \quad (4.26)$$

Представляет собой центр группирования результатов измерений.

#### 2. Дисперсия

$$D = m_2 \quad (4.27)$$

представляет собой меру разброса случайной величины. Для случайных процессов дисперсия равна средней мощности процесса.

#### 3. Коэффициент асимметрии

$$\beta_1 = \frac{m_3}{(m_2)^{3/2}} \quad (4.28)$$

Унимодальное распределение с  $\beta_1 < 0$  имеет левую асимметрию, с  $\beta_1 > 0$  - правую (рис. 4.1). Если  $\beta_1 = 0$ , распределение симметрично.

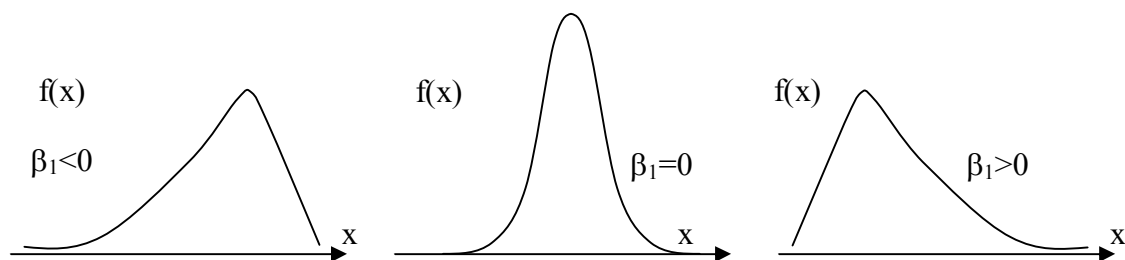


Рис. 4.1

#### 4. Коэффициент эксцесса

$$\beta_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2} - 3 \quad (4.29)$$

характеризует остроту вершины плотности распределения. За ноль по шкале  $\beta_2$  принят эксцесс гауссовского распределения (в этом случае  $m_4/(m_2)^2 = 3$ ). Плотности с  $\beta_2 < 0$  имеют более плоскую вершину, чем гауссовская плотность, а плотности с  $\beta_2 > 0$  - более острую (рис. 4.2).

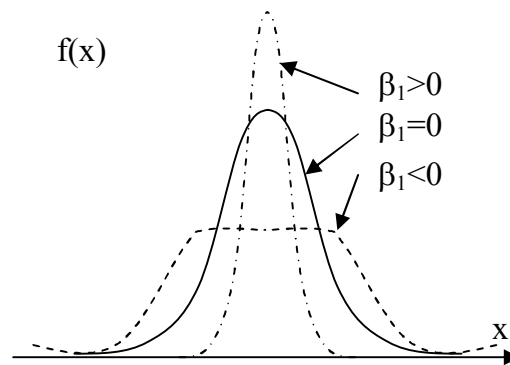


Рис. 4.2

Начальные моменты распределения оцениваются по выборке  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$  следующим образом

$$M_p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \epsilon_n^p \quad (4.30)$$

Данные оценки являются состоятельными и несмещенными.

Несколько сложнее обстоит дело с центральными моментами и, в частности, с дисперсией. Если математическое ожидание  $\mu$  оценки  $\epsilon$  известно, то оценка  $p$ -го момента находится как

$$M_p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \mu)^p \quad (4.31)$$

Априорное знание математического ожидания  $\mu$  на практике встречается не так редко, как это может показаться. Например, принимаемые радиосигналы часто являются случайными процессами с нулевым математическим ожиданием.

Если математическое ожидание  $\mu$  неизвестно, то оценки (4.31), где вместо  $\mu$  подставляется оценка  $\hat{\mu} = M_1$ , будет смещенной. Смещение можно сделать равным нулю, если несколько изменить (4.31)

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_2 &= \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \hat{\mu})^2, \\ \hat{\mu}_3 &= \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \hat{\mu})^3, \\ \hat{\mu}_4 &= \frac{N^2 - 2N + 3}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \hat{\mu})^4 - \frac{3(2N-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \left[ \sum_{n=1}^N (\epsilon_n - \hat{\mu})^2 \right]^2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\hat{\mu} = N^{-1} \sum_{n=1}^N \epsilon_n$  - оценка математического ожидания.

#### 4.4. Оценка корреляционной функции случайного процесса

Оценка корреляционной функции позволяет не только определить степень статистической зависимости двух разнесенных по времени отсчетов случайного процесса и определить один из важных параметров процесса – время декорреляции, но также является необходимой операцией для дальнейшего спектрального анализа.

Пусть наблюдается случайный процесс  $\xi(t)$  и получено  $N$  его отсчетов  $\xi[0], \dots, \xi[N-1]$  в дискретные моменты времени. Для оценки корреляционной функции используют два способа.

Несмещенная оценка. Оценка значения корреляционной функции в момент  $mT$  равна

$$\hat{R}[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \tilde{\xi}[n] \tilde{\xi}[n+m] \quad (4.33)$$

где  $\tilde{\xi}[n] = \xi[n] - \hat{\mu}$  - центрированный отсчет процесса, т.е. отсчет, из которого вычтена оценка математического ожидания  $\hat{\mu}$ . Оценка (4.33) является несмещенной. Однако эта оценка обладает одним недостатком: при увеличении  $m$  дисперсия  $\hat{R}[m]$  растет. Это объясняется тем, что для расчета  $\hat{R}[m]$  используется  $(N-m)$  пар отсчетов случайного процесса. В связи с этим при увеличении  $m$  количество произведений в сумме (4.33) уменьшается и качество усреднения ухудшается. Поэтому на практике чаще используют другую оценку корреляционной функции.

Смещенная оценка. В этом случае оценка вычисляется как

$$\tilde{R}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \xi[n] \xi[n+m] = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R[m] \quad (4.34)$$

Данная оценка хотя и имеет смещение, но дисперсия ошибки оценивания для нее меньше, чем у несмещенной оценки. Понять причину этого несложно, если учесть, что смещенная оценка может быть получена из несмещенной умножением последней на треугольное окно  $w[m] = (1 - |m|/N)$ , значения отсчетов которого убывают с увеличением  $m$ .

#### **4.5. Оценка спектральной плотности мощности случайных процессов**

Оценка спектральной плотности мощности (СПМ) случайных процессов является наиболее часто встречающейся задачей при обработке результатов измерений. Важность этой проблемы подтверждается огромным числом публикаций на данную тему. К настоящему времени предложено большое число методов спектрального оценивания, даже краткое рассмотрение которых в несколько раз увеличило бы объем настоящего учебного пособия. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь двух классических методов спектрального анализа<sup>1</sup>.

##### **4.5.1. Метод коррелограмм**

СПМ и корреляционная функция случайного стационарного процесса  $\xi(t)$  в соответствии с теоремой Винера – Хинчина связаны прямым преобразованием Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.35)$$

Пусть корреляционная функция оценена в дискретные моменты времени  $nT$ ,  $n = \overline{0, N}$ . Тогда оценка СПМ может быть вычислена, если интеграл в (4.35) вычислить методом прямоугольников

$$\hat{S}(\omega) = T \sum_{n=-N}^{N-1} \hat{R}[n] e^{-in\omega T} \quad (4.36)$$

---

<sup>1</sup> Тех, кто заинтересуется проблемой спектрального анализа и ее состоянием на настоящий момент, мы адресуем к монографии С. Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

где  $R[n]$  при  $n < 0$  вычисляются на основании известного свойства корреляционной функции

$$R[-n] = R^*[n], n = 1, 2, \dots$$

Расчет  $S(\omega)$  удобно производить в дискретных точках

$$\omega_m = m \frac{2\pi}{2NT}, m = \overline{0, 2N-1} \quad (4.37)$$

Тогда

$$S[m] = T \sum_{n=-N}^{N-1} R[n] e^{-i \frac{2\pi}{2N} mn}, m = \overline{0, 2N-1} \quad (4.38)$$

Последнее равенство целесообразно переписать в виде удобном для использования при вычислениях алгоритма *быстрого преобразования Фурье* (БПФ)

$$S[m] = T \sum_{n=0}^{N_1-1} R[n] e^{-i \frac{2\pi}{N_1} mn}, m = \overline{0, N_1-1} \quad (4.39)$$

где  $N_1 = 2N$ ,  $R[n]$ ,  $n = \overline{0, N_1-1}$  - вектор размерности  $2N$

$$R[n] = \begin{cases} R[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ R[2N-n], & N \leq n \leq 2N-1 \end{cases} \quad (4.40)$$

Отметим, что для использования алгоритма БПФ  $N$  должно быть равно целой степени числа 2.

Использование метода коррелограмм в вышеизложенном виде приводит к возникновению значительных пульсаций у оценки СПМ. Причиной этих пульсаций является обрезание «хвостов» корреляционной функции при переходе от интеграла (4.35) к конечной сумме (4.36). Поскольку это обрезание фактически эквивалентно перемножению бесконечной по своей протяженности корреляционной функции на прямоугольное окно протяженности  $2N$ , то здесь мы встречаемся с обсуждавшимся в разделе 3.1.4. эффектом Гиббса. Для уменьшения уровня пульсаций, как это было сделано и при синтезе КИХ фильтров, используются различные весовые окна (см. табл. 1), на которые умножаются отсчеты  $R[n]$ ,  $n = \overline{0, N_1-1}$ . При этом уровень пульсаций удастся уменьшить. Однако

разрешающая способность такого спектроанализатора хуже, чем у спектроанализатора с прямоугольным весовым окном.

#### 4.5.2. Метод периодограмм

Пусть в результате эксперимента получена дискретная выборка отсчетов процесса  $\xi[0], \dots, \xi[N-1]$ . Без потери общности можно считать, что математическое ожидание этих отсчетов равно нулю. Вычислим для полученной выборки *дискретное преобразование Фурье* (ДПФ)

$$G[m] = T \sum_{n=0}^{N-1} \xi[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} mn}, m = \overline{0, N-1} \quad (4.41)$$

где  $G[m]$  - дискретный отсчет мгновенного спектра процесса  $G(\omega)$  при  $\omega_m = \frac{2\pi}{NT} m$ . Вычислим  $TN^{-1}|G[m]|^2$

$$TN^{-1}|G[m]|^2 = TN^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \xi[n] \xi[k] e^{-i \frac{2\pi}{N} m(n-k)} \quad (4.42)$$

Простой заменой индексов суммирования двойную сумму в (4.42) можно привести к виду

$$TN^{-1}|G[m]|^2 = T \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \mathcal{K}[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} mn} \quad (4.43)$$

где

$$\mathcal{K}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \xi[n] \xi[n+|m|] -$$

смещенная оценка корреляционной функции процесса. Следовательно, правая часть равенства (4.43) является ДПФ оценки корреляционной функции и может быть принята в силу теоремы Винера – Хинчина за оценку СПМ. Таким образом, оценка СПМ может быть получена с использованием периодограммы (мгновенного спектра)  $G[m]$  как

$$\mathcal{S}[m] = \frac{T}{N} |G[m]|^2, m = \overline{0, N-1} \quad (4.44)$$

В этот и заключается смысл метода периодограмм.

В теории спектрального анализа доказывается, что оценки (4.39) и (4.44) несостоятельны, поскольку при увеличении  $N$  их дисперсия не стремится к нулю. В методе периодограмм уменьшение ошибки оценивания достигается тем, что:

- производится усреднение в скользящем окне соседних отсчетов периодограммы (метод Даньелла);
- вся выборка разбивается на неперекрывающиеся множества отсчетов процесса с последующим равновесным усреднением периодограмм этих множеств (метод Барлетта);
- выборка процесса разбивается на перекрывающиеся множества отсчетов процесса с последующим усреднением периодограмм этих множеств в весовом окне (метод Уэлча).