

3. Моделирование процессов преобразования сигналов и помех линейными и нелинейными звеньями

Любое преобразующее радиосигнал устройство может быть представлено в виде совокупности линейных и нелинейных звеньев. Формально различие между этими двумя категориями заключается в типе дифференциальных уравнений, описывающих связь входных и выходных сигналов: для первой категории эти уравнения линейные, а для второй – нелинейные. Неформально различие между ними проявляется при анализе реакции системы на входное воздействие, которое может быть представлено в виде суммы (суперпозиции) сигналов

$$x(t) = \sum_k x_k(t) \quad (3.1)$$

Для линейных систем реакция $y(t)$ на воздействие $x(t)$ является суммой реакций на каждый из сигналов $x_k(t)$

$$y(t) = \sum_k y_k(t) \quad (3.2)$$

где $y_k(t)$ - реакция системы на сигнал $x_k(t)$.

Таким образом, для линейной системы выполняется принцип суперпозиции. Для нелинейной системы (3.2) не выполняется, а, следовательно, не справедлив и принцип суперпозиции. В связи со значительной разницей физических свойств линейных и нелинейных звеньев при их моделировании используются различные методы.

3.1. Моделирование линейных звеньев

Пусть линейное звено (ЛЗ) описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$a_M y^{(M)}(t) + a_{M-1} y^{(M-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_N x^{(N)}(t) + b_{N-1} x^{(N-1)}(t) + \dots + b_0 x(t)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - входной и выходной сигналы.

Допустим, что на вход подается гармонический сигнал $x(t) = e^{i\omega t}$. Из теории электрических цепей известно, что сигнал на выходе системы через некоторое время, равное интервалу затухания переходных процессов, тоже будет иметь вид гармонического сигнала, но с отличной от входного ампли-

тудой и фазой - $y(t) = Ae^{i\omega t}$. Подставляя выражения для $x(t)$ и $y(t)$ в (3.3), получим

$$A = \frac{b_N(i\omega)^N + b_{N-1}(i\omega)^{N-1} + \dots + b_0}{a_M(i\omega)^M + a_{M-1}(i\omega)^{M-1} + \dots + a_0}$$

Амплитуда A является комплексной функцией только частоты ω . Поскольку при гармоническом сигнале на входе выполняется равенство $y(t) = Ax(t)$, то A может рассматриваться как коэффициент передачи звена. Тогда, вводя переменную $s = i\omega$, для коэффициента передачи ЛЗ получим

$$H(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_0}{a_M s^M + a_{M-1} s^{M-1} + \dots + a_0} \quad (3.4)$$

Функция $H(s)$ полностью характеризует ЛЗ. В частности частотная характеристика ЛЗ равна $H(i\omega)$, а импульсная характеристика может быть получена как обратное преобразование Фурье от $H(i\omega)$ или обратное преобразование Лапласа от $H(s)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} H(s) e^{st} ds \quad (3.5)$$

причем контур интегрирования во втором интеграле, представляющий собой параллельную мнимой оси прямую на комплексной плоскости переменной s , выбором σ смещается так, чтобы все особенности функции $H(s)$ были расположены слева от него.

Существует и обратная связь, позволяющая по импульсной характеристике определить коэффициент передачи или частотную характеристику ЛЗ

$$H(i\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt, \quad H(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (3.6)$$

При записи (3.6) предполагается, что $h(t) = 0$ при $t < 0$, т.е. ЛЗ является реализуемым (удовлетворяет принципу причинности). Можно показать, что необходимым условием для реализуемости ЛЗ является расположение всех особых точек функции $H(s)$, а такими в соответствии с (3.4) могут быть только полюсы, слева от мнимой оси комплексной плоскости переменной s .

При цифровом моделировании ЛЗ его входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы представляются в виде решетчатых функций $x[n]$ и $y[n]$, которые

отличны от нуля для дискретных моментов времени $nT, n = 0, 1, 2, \dots$, где T - период дискретизации. Точное равенство входных $x[n] = x(nT)$ и выходных сигналов $y[n] = y(nT)$ ЛЗ и его цифровой модели не достижимо. На практике возможно лишь приближенное равенство $y[n] \approx y(nT)$. Задачей синтеза цифровой модели является нахождение такого алгоритма вычисления $y[n]$ по $x[n]$, при котором это приближенное равенство выполняется как можно точнее. В такой постановке задача моделирования ЛЗ ничем не отличается от задачи синтеза цифрового фильтра (ЦФ) по его аналоговому прототипу. При этом само ЛЗ будет эквивалентно фильтру аналоговому (прототипу), а его цифровая модель – фильтру цифровому. Рассмотрим некоторые методы составления цифровых моделей линейных звеньев.

3.1.1. Метод инвариантности импульсной характеристики

При синтезе модели этим методом обеспечивается равенство импульсных характеристик аналогового фильтра и цифрового фильтра

$$h[n] = h(n\Delta t), n = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

Передаточная функция ЦФ при этом равна z -преобразованию от импульсной характеристики

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (3.8)$$

Допустим, что аналоговый фильтр имеет передаточную функцию вида

$$H(s) = H_0 \frac{(s - S_1)(s - S_2) \cdots (s - S_M)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_N)} \quad (3.9)$$

где $S_m, m = \overline{1, M}$ и $s_n, n = \overline{1, N}$ – нули и полюсы передаточной характеристики. Импульсная характеристика аналогового фильтра однозначно определяется как преобразование Лапласа функции $H(s)$, и в случае, когда полюсы $s_n, n = \overline{1, N}$ простые, равна

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \quad (3.10)$$

где $A_k = H(s)(s - s_k) \Big|_{s=s_k}$; $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$. Тогда на основании (3.7)) импульсная характеристика ЦФ равна

$$h[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k T n} \quad (3.11)$$

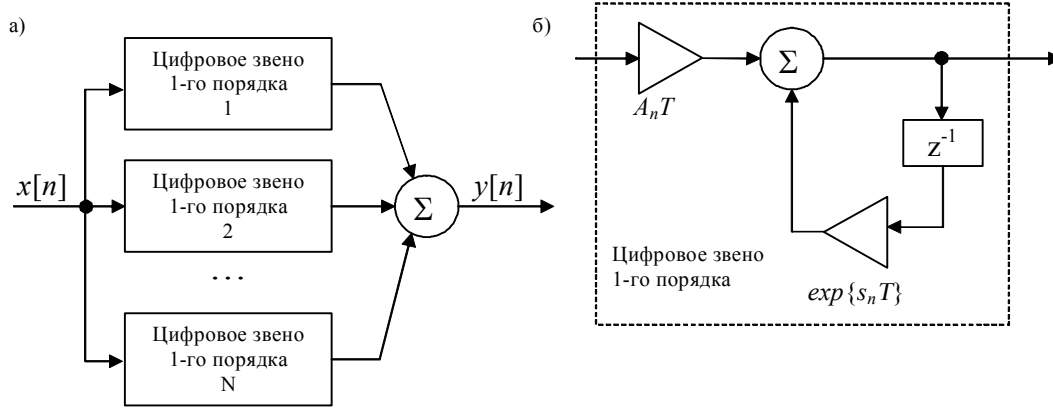


Рис. 3.1

Подставляя (3.11) в (3.8), получим коэффициент передачи ЦФ

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (3.12)$$

Учитывая, что умножение Z -преобразования цифрового сигнала на z^{-1} эквивалентно задержке сигнала на период дискретизации T , получим схему реализации фильтра в виде N параллельно включенных цифровых звеньев первого порядка (см. рис. 3.1).

Докажем, что рассматриваемый метод дает устойчивый реализуемый цифровой фильтр. Для доказательства устойчивости обратимся к (3.11). Поскольку $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$, то экспоненциальные члены $e^{s_k T n}$ при увеличении n будут убывать, и $h[n] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, получающийся в результате использования метода инвариантности импульсной характеристики ЦФ будет устойчив. Рассмотрим теперь вопрос о реализуемости. Из теории цифровых фильтров известно, что для реализуемости необходимо, чтобы полюсы коэффициента передачи ЦФ лежали внутри круга единичного радиуса на плоскости переменной z . Из (3.12) следует, что коэффициент передачи $H(z)$ синтезируемого фильтра имеет N полюсов $z_k = e^{s_k T}, k = \overline{1, N}$. В силу того, что $\text{Re}\{s_k\} < 0, k = \overline{1, N}$, получаем $|z_k| = e^{\text{Re}\{s_k\}T} < 1, k = \overline{1, N}$, Следовательно,

все полюсы фильтра лежат внутри круга единичного радиуса, и синтезируемый фильтр реализуем.

Рассмотренный метод не может быть использован, когда коэффициент передачи аналогового фильтра $H(s)$ не имеет полюсов ($N = 0$) или когда число полюсов меньше числа нулей ($N < M$).

3.1.2. Метод билинейного преобразования

Пусть коэффициент передачи аналогового фильтра задан в виде

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_0} \quad (3.13)$$

причем $N \geq M$. Без потери общности можно считать, что $a_N = 1$. Разделим числитель и знаменатель (3.13) на s^N . В результате получим

$$H(s) = \frac{b_M (1/s)^{N-M} + b_{M-1} (1/s)^{M-N-1} + \dots + b_0 (1/s)^N}{1 + a_{N-1} (1/s) + \dots + a_0 (1/s)^N} \quad (3.14)$$

Фильтр с коэффициентом передачи (14) может быть реализован по схеме, представленной на рис. 3.2а.

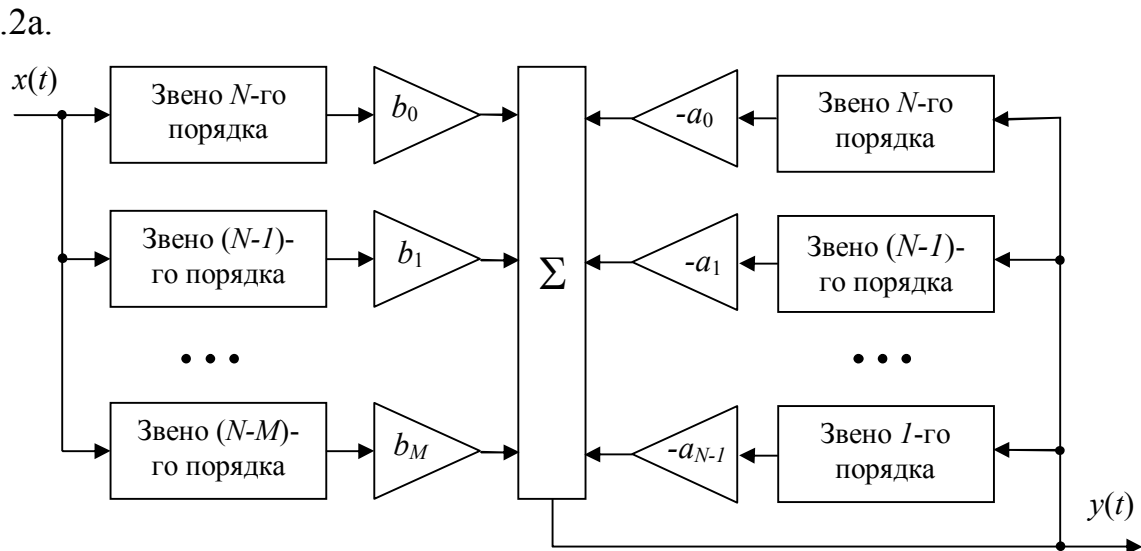


Рис. 3.2

Основным элементом структурной схемы на рис. 3.2 является звено n -го порядка с коэффициентом передачи $H_n(s) = 1/s^n$, которое представляет собой последовательное соединение n интеграторов (рис. 3.3).

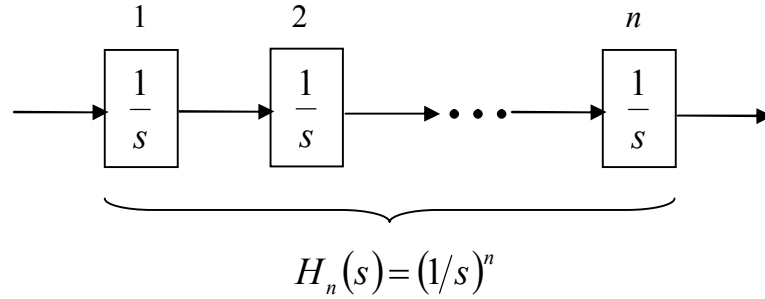


Рис. 3.3

Следовательно, базовым элементом для реализации аналогового фильтра (3.14) является интегратор – звено с коэффициентом передачи $H_1(s) = 1/s$. Поэтому при цифровом моделировании фильтра за базовый элемент может быть взят цифровой аналог интегратора.

При построении цифрового интегратора может быть использована рекуррентная процедура, реализующая один из наиболее точных методов численного интегрирования – *метод трапеций*. В соответствии с этим методом интеграл от некоторой функции $f(t)$ на интервале $[t_0, t_n]$ вычисляется на основании следующего соотношения

$$g(t_n) = \int_{t_0}^{t_n} f(t) dt \approx T \left[\frac{f(t_0) + f(t_1)}{2} + \frac{f(t_1) + f(t_2)}{2} + \dots + \frac{f(t_{n-1}) + f(t_n)}{2} \right] \quad (3.15)$$

где $t_k = t_0 + kT$, $k = \overline{0, n-1}$ – n равномерно распределенных на интервале $[t_0, t_n]$ узлов интегрирования.

Пусть на вход интегрирующего звена подается процесс $f(t)$. Тогда на основании (3.15) сигналы на выходе цифрового интегратора в моменты t_n и t_{n+1} связаны следующим рекуррентным соотношением

$$g[n+1] = g[n] + \frac{T}{2} \{ f[n] + f[n+1] \} \quad (3.16)$$

Взяв Z -преобразование от (3.16), получим

$$zG(z) = G(z) + \frac{T}{2} \{ F(z) + zF(z) \}$$

Тогда коэффициент передачи цифрового интегратора равен

$$H_1(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.17)$$

Следовательно, переменной s в выражении для коэффициента передачи аналогового фильтра может быть поставлено в соответствие следующее выражение

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.18)$$

при записи коэффициента передачи ЦФ. Преобразование (3.18) в теории функций комплексной переменной называется *билинейным*. Отсюда следует и название метода. Особенность билинейного преобразования заключается в том, что левая полуплоскость переменной s отображается во внутренность окружности единичного радиуса в плоскости переменной z . Поэтому, если аналоговый фильтр с коэффициентом передачи $H(s)$ имел полюсы в левой полуплоскости переменной s (т.е. был устойчив и реализуем), то эти полюсы преобразованием (3.18) будут отображены во внутренность окружности единичного радиуса в плоскости переменной z . Следовательно, метод билинейного преобразования позволяет получить устойчивые и реализуемые цифровые фильтры, если этими свойствами обладали их аналоговые прототипы.

Применение метода билинейного преобразования для синтеза (моделирования) ЦФ приводит к явлению *деформации шкалы частот*. Суть данного явления в следующем. Пусть ω и Ω - круговые частоты при записи частотных характеристик аналоговых и соответствующих им цифровых фильтров. Учитывая, что $s = i\omega$ и $z = e^{i\Omega}$, получим следующую связь ω и Ω

$$\omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \quad (3.19)$$

При малых Ω в силу того, что $\operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \approx \frac{\Omega}{2}$, $\Omega \approx \omega T$. Следовательно, при $\Omega \ll 1$ аналоговый и цифровой фильтры будут иметь примерно одинаковые амплитудно-частотные характеристики. Однако для более высоких частот соотношение между ω и Ω становится нелинейным, т.е. происходит деформация шкалы частот (рис. 3.4).

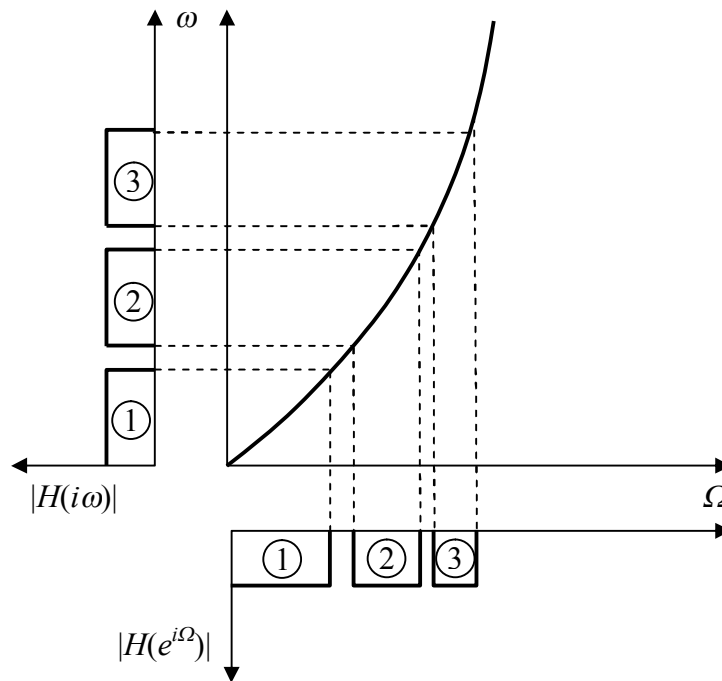


Рис. 3.4

Влияние этой деформации можно проиллюстрировать на примере моделирования аналогового фильтра, АЧХ которого имеет три одинаковые по ширине полосы пропускания 1, 2 и 3. Синтезированный ЦФ также будет иметь три полосы. Однако ширины полос пропускания будут в силу деформации шкалы частот разными, как показано на рис. 3.4. Явление деформации шкалы частот на АЧХ ЦФ может быть скомпенсировано введением предискажений в АЧХ прототипа, которые заключаются в растяжении шкалы частот по закону

$$\omega' = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \quad (3.20)$$

где ω' - деформированная частота для аналогового фильтра.

Метод билинейного преобразования гарантирует хорошее совпадение частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров в диапазоне частот $|\omega| \leq \pi/4T$. При $|\omega| > \pi/4T$ частотные характеристики фильтров, как правило, значительно различаются.

3.1.3. Метод замены дифференциалов

Будем считать, что в (3.13) $a_0 = 1$. Тогда прямая реализация аналогового фильтра по его коэффициенту передачи $H(\omega)$ возможна, если будет реализована структурная схема, представленная на рис. 3.5.

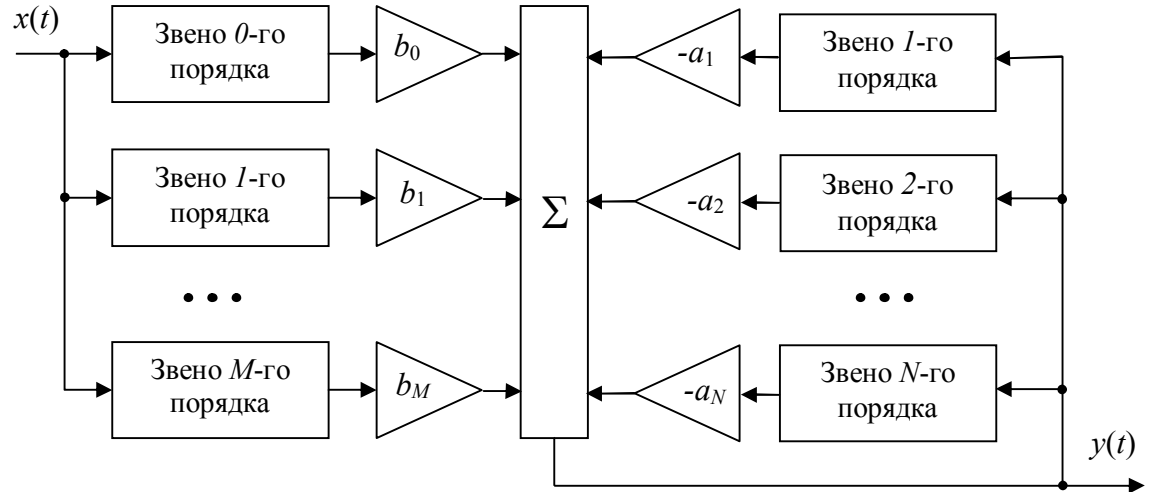


Рис. 3.5

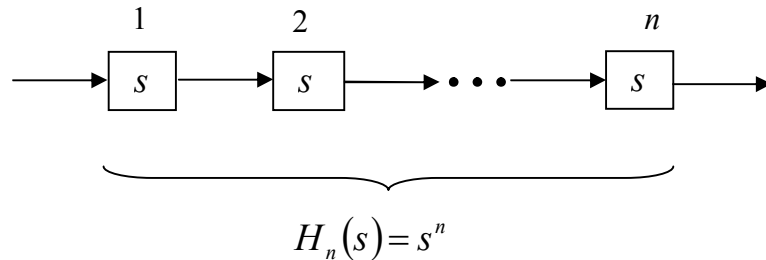


Рис. 3.6

Основное отличие этой схемы от схемы на рис. 3.3 заключается в том, что ее звенья построены на основе каскадного включения дифференциаторов (рис. 3.6). Поэтому базовым элементом для построения модели ЦФ может быть взят дифференциатор с коэффициентом передачи $H_1(s) = s$. Определим коэффициент передачи цифрового аналога дифференцирующего звена. За основу могут быть взяты формулы численного дифференцирования

$$g(t_n) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_n} = \begin{cases} \frac{f(t_n) - f(t_n - T)}{T}, & \text{нисходящая разность} \\ \frac{f(t_n + T) - f(t_n)}{T}, & \text{восходящая разность} \end{cases} \quad (3.21)$$

Подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе, возьмем Z -преобразование от обеих частей уравнения (3.21). В результате получим коэффициенты передачи цифровых дифференциаторов, построенных соответственно на основе нисходящих и восходящих разностей

$$H_1(z) = \begin{cases} \frac{1 - z^{-1}}{T}, & \text{нисходящая разность} \\ \frac{z - 1}{T}, & \text{восходящая разность} \end{cases} \quad (3.22)$$

Следовательно, при синтезе цифрового фильтра возможны две замены

$$s_{\nabla} = \frac{1 - z^{-1}}{T} \text{ и } s_{\Delta} = \frac{z - 1}{T} \quad (3.23)$$

Несложно показать, что замена, полученная методом нисходящих разностей, отображает левую полуплоскость переменной s во внутренность окружности радиуса $1/2$ с центром в точке $1/2$ (рис. 3.7 а), которая является частью единичного круга на плоскости переменной z . Следовательно, при использовании замены переменных

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (3.24)$$

получаются устойчивые и реализуемые цифровые фильтры.

В то же время преобразование, полученное методом восходящих разностей, отображает левую полуплоскость переменной s в полуплоскость, лежащую ниже прямой $y = x - 1$, где $x = \operatorname{Re}(z)$ и $y = \operatorname{Im}(z)$ (рис. 3.7 б). Поэтому полюсы устойчивого и реализуемого аналогового фильтра при таком преобразовании могут попасть в область за пределами единичной окружности. В результате синтезируемый фильтр будет нереализуемым. Следовательно, для рассматриваемого метода синтеза цифровых фильтров следует использовать только замену (3.24).

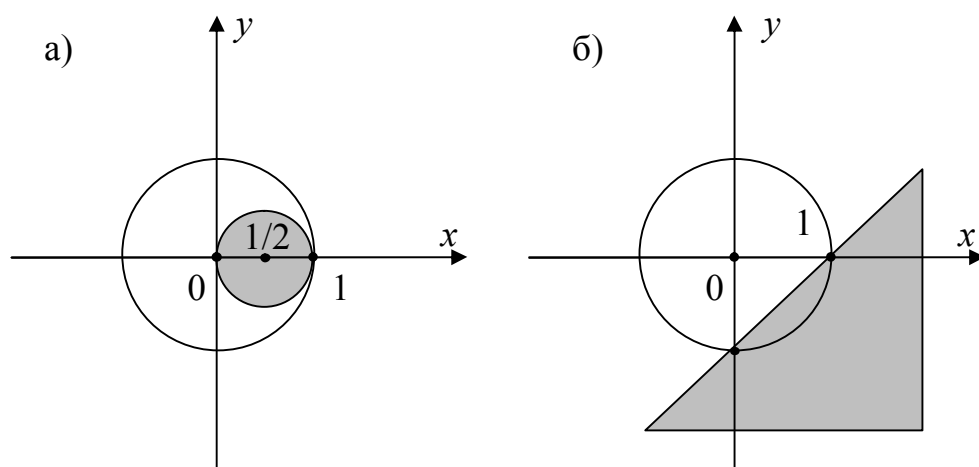


Рис. 3.7

Метод замены дифференциалов применим в ситуациях, когда метод инвариантности импульсной характеристики не используется. В то же время, метод может дать значительную разницу в частотных характеристиках фильтров, если нули коэффициента передачи аналогового фильтра $H(s)$ имеют действительную часть, превышающую по величине $1/2T$. Кроме того, метод не всегда гарантирует близкое совпадение характеристик аналогового и цифрового фильтра, когда $H(s)$ не имеет нулей ($M = 0$).

3.1.4. Расчет КИХ фильтров

В предыдущих разделах рассматривались методы цифрового моделирования аналоговых фильтров. В результате использования изложенных способов получаются цифровые фильтры, имеющие рекурсивную структуру и бесконечную по длительности импульсную характеристику. В силу последнего в теории цифровых фильтров подобные устройства получили название БИХ фильтров (фильтры с бесконечной импульсной характеристикой). Эти фильтры, как было показано, наследуют от своих аналоговых прототипов такие свойства как устойчивость и реализуемость. Однако БИХ фильтры имеют и ряд недостатков. Оказывается, что при высоких порядках ошибки округления, неизбежно возникающие при вычислении коэффициентов БИХ фильтра, могут привести к его неустойчивости. Кроме того, БИХ фильтры обеспечивают хорошую аппроксимацию амплитудной характеристики аналогового прототипа при нелинейной фазовой характеристике. Последнее обстоятельство в некоторых случаях является нежелательным. Избавиться от этих недостатков позволяют КИХ фильтры, т.е. фильтры с конечной импульсной характеристикой. Эти фильтры всегда устойчивы и имеют линейную фазочастотную характеристику, если импульсная характеристика симметрична или антисимметрична относительно своей середины.

Синтез КИХ фильтров производится следующим образом. Пусть $H_d(z)$ - коэффициент передачи БИХ фильтра с импульсной характеристикой $h_d[n]$, $n = 0, 1, \dots$. Положим импульсную характеристику КИХ фильтра равной

$$h[n] = w[n]h_d[n], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.25)$$

где

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.26)$$

Дискретная функция $w[n]$ называется *прямоугольным окном*. На основании свойств дискретного преобразования Фурье амплитудно-частотная характеристика КИХ фильтра равна свертке АЧХ БИХ фильтра и АЧХ окна

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{i\nu}) W(e^{i(\Omega-\nu)}) d\nu \quad (3.27)$$

Несложно показать, что АЧХ прямоугольного окна равна

$$W(e^{i\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-in\Omega} = e^{-i\frac{N-1}{2}\Omega} \frac{\sin \frac{N\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} \quad (3.28)$$

График модуля функции $W(e^{i\Omega})$ представлен на рис. 3.8.

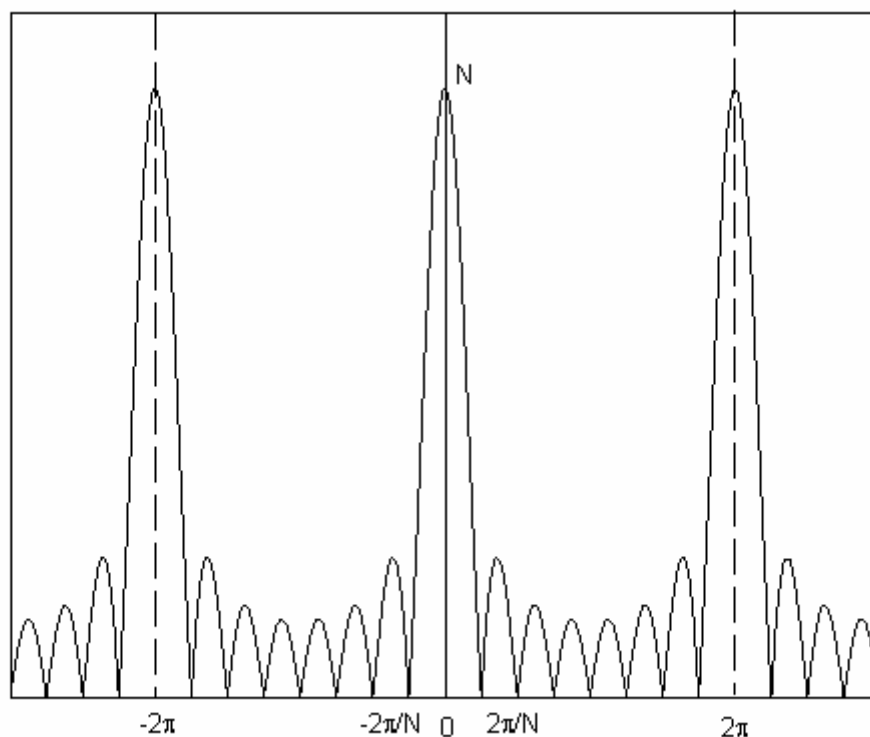


Рис. 3.8

Эта функция имеет следующие особенности:

1. $|W(e^{j\Omega})|$ - периодическая функция с периодом 2π ;
2. График $|W(e^{j\Omega})|$ имеет вид периодически повторяющихся лепестков, максимальное значение которых равно N , а ширина по первым нулям - $4\pi/N$;
3. Между главными лепестками находятся боковые, ширина которых равна $2\pi/N$;
4. Максимальный уровень N имеет первый боковой лепесток, относительный уровень которого равен -13 дБ;
5. С увеличением N отношение площадей в главном лепестке и первом боковом остается постоянным.

Рассмотрим, к каким последствиям приводят названные свойства на примере синтеза фильтра нижних частот, АЧХ которого $H_d(e^{j\Omega})$ представлена на рис. 3.9 а. Результат свертки функции $H_d(e^{j\Omega})$ и $W(e^{j\Omega})$ представлен на рис. 3.9 б.

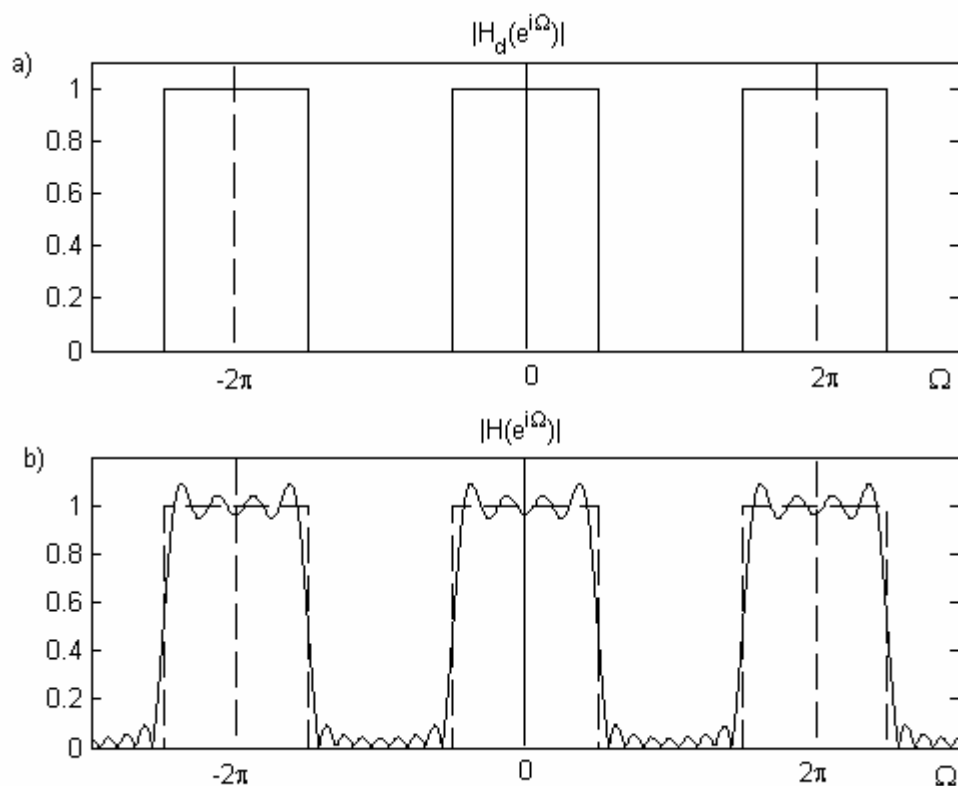


Рис. 3.9

Из рисунка видно, что АЧХ КИХ фильтра имеет пульсирующий характер как в полосе пропускания, так и в полосе заграждения. Причем амплитуда пульсаций АЧХ возрастает по мере приближения к границе полосы пропускания. Другой особенностью АЧХ КИХ фильтра является появление переходной области между полосами пропускания и заграждения, где АЧХ меняется сравнительно медленно. Анализ показывает, что при увеличении количества отсчетов N в импульсной характеристике КИХ фильтра (ширины прямоугольного окна) крутизна АЧХ в переходной полосе увеличивается, Однако при этом уровень пульсаций АЧХ в полосах пропускания и заграждения практически остается постоянным, хотя частота самих пульсаций увеличивается. Это явление получило название *эффекта Гиббса*, названного так по имени математика впервые исследовавшего вопросы сходимости рядов Фурье.

Для уменьшения эффекта Гиббса используют другие, отличные от прямоугольного, весовые окна:

1. Окно Барлетта (треугольное окно)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (3.29)$$

2. Окно Ханна

$$w[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right], 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.30)$$

3. Окно Хэмминга

$$w[n] = 0,54 - 0,46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.31)$$

4. Окно Блэкмана

$$w[n] = 0,42 - 0,5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0,08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.32)$$

5. Окно Кайзера

$$w[n] = \frac{I_0 \left(\alpha \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1} \right)^2} \right)}{I_0(\alpha)}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.33)$$

где $I_0(\cdot)$ - функция Бесселя мнимого аргумента, α - постоянный коэффициент, $4 \leq \alpha \leq 9$. Изменение α позволяет влиять на уровень боковых лепестков.

Значения уровня первого бокового лепестка и ширины главного лепестка по половинному уровню сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Окно	Амплитуда первого бокового лепестка, дБ	Ширина главного лепестка
Прямоугольное	- 13	$2\pi/N$
Барлетта	- 25	$4\pi/N$
Ханна	- 31	$4\pi/N$
Хэмминга	- 41	$4\pi/N$
Блэкмана	- 57	$6\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 4$)	- 30	$4\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 6$)	- 45	$4\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 9$)	- 67	$6\pi/N$

3.2. Моделирование нелинейных систем

В зависимости от сложности математического моделирования различают три типа нелинейных звеньев:

- Безынерционные нелинейные звенья;
- Инерционные замкнутые нелинейные звенья;
- Звенья, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

3.2.1. Моделирование безынерционных нелинейных звеньев

Пусть задано звено, в котором производится нелинейное функциональное преобразование входного сигнала $x(t)$

$$y(t) = g(x(t)) \quad (3.34)$$

где $g(\cdot)$ - некоторая функция, Поскольку выходной сигнал $y(t)$ в момент времени t определяется только значением $x(t)$ в тот же момент времени и не зависит от предыдущих значений входного сигнала, такое звено называется безынерционным. Цифровой моделью сигнала на выходе будет

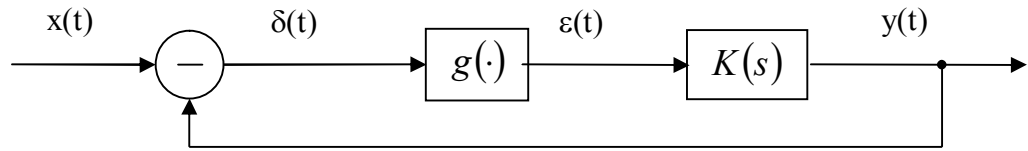
$$y[n] = g(x[n]) \quad (3.35)$$

где $x[n]$ - модель входного сигнала. При этом, однако, следует помнить, что нелинейное преобразование сигналов приводит к изменению ширины спектра сигнала на выходе по сравнению с шириной спектра сигнала на входе. Как правило, это изменение происходит в сторону увеличения ширины спектра. Поэтому при наличии в радиотехнической системе нелинейных звеньев необходимо так выбирать частоту дискретизации сигналов, чтобы отмеченное увеличение ширины спектра не нарушало условий Котельникова – Найквиста.

3.2.2. Моделирование замкнутых инерционных нелинейных звеньев

Замкнутым инерционным нелинейным звеном называется система слежения, содержащая нелинейные безынерционные звенья. Типичная структурная схема подобной системы приведена на рис. 3.10 а.

а)



б)

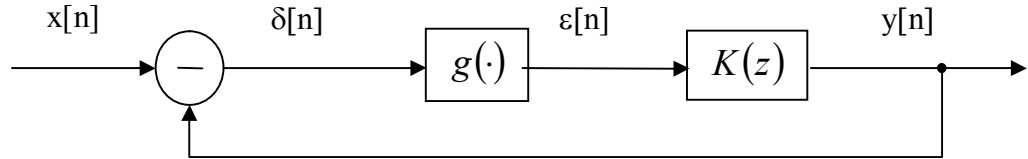


Рис. 3.10

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ - входной и выходной процессы. Основной задачей звена является поддержание примерного равенства $x(t)$ и $y(t)$. В состав звена входит нелинейное безынерционное звено, характеризуемое функциональным преобразованием $g(\cdot)$, а также линейное звено с коэффициентом передачи $K(s)$. В состав линейного звена должно входить одно или несколько интегрирующих звеньев, необходимых для придания всей замкнутой системе нужного порядка астатизма.

Допустим, что цифровым аналогом системы на рис. 3.10а будет дискретная система, структурная схема которой приведена на рис. 3.10б. Здесь $K(z)$ - коэффициент передачи ЦФ, прототипом которого является аналоговый фильтр с коэффициентом передачи $K(s)$.

Запишем сигналы в характерных точках схемы

$$\begin{aligned}\delta[n] &= x[n] - y[n] \\ \varepsilon[n] &= g(\delta[n]) = g(x[n] - y[n]) \\ a_N y[n - N] + \dots + a_0 y[n] &= b_M \varepsilon[n - M] + \dots + b_0 \varepsilon[n]\end{aligned}\tag{3.36}$$

где $a_N, \dots, a_0, b_M, \dots, b_0$ - коэффициенты разностного уравнения ЦФ,

Поскольку основной задачей при моделировании является вычисление текущего значения выходного процесса $y[n]$, сгруппируем в левой части последнего уравнения системы (3.36) все сигналы, зависящие от $y[n]$, а в правой – сигналы, значения которых на момент дискретного времени n известны

$$a_0 y[n] - b_0 g(x[n] - y[n]) = b_M \varepsilon[n - M] + \dots + b_0 \varepsilon[n] - a_N y[n - N] - \dots - a_1 y[n - 1] \quad (3.37)$$

Анализ (3.37) показывает, что на n -м шаге моделирования для определения текущего значения выходного процесса $y[n]$ требуется решить нелинейное относительно неизвестного уравнение вида

$$a_0 y[n] - b_0 g(x[n] - y[n]) = \xi[n] \quad (3.38)$$

где $\xi[n]$ - известное значение. Поиск решения нелинейного уравнения (3.38)

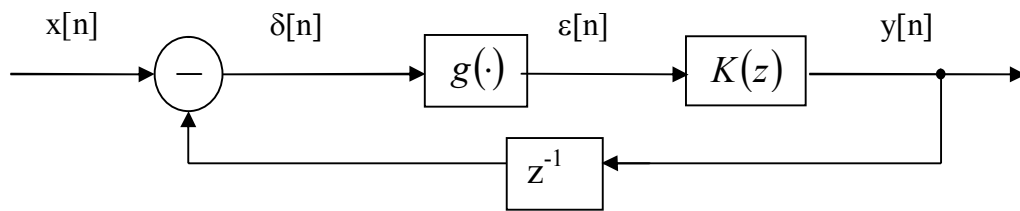


Рис. 3.11

на каждом шаге может значительно увеличить время моделирования. Поэтому необходимо найти способ избежать решения нелинейных уравнений типа (3.38). Такой способ достаточно очевиден: необходимо включить в цепь обратной связи элемент задержки на один такт, как это показано на рис. 3.11.

При этом уравнение для неизвестного выходного сигнала становится линейным

$$a_0 y[n] = \xi[n] + b_0 g(x[n - 1] - y[n - 1]) \quad (3.39)$$

и его решение не вызывает затруднений.

Необходимо отметить, что введение задержки на один такт в цепь обратной связи вносит дополнительную погрешность. Однако величина этой погрешности зависит от величины периода дискретизации, и уменьшение последнего позволяет сделать эту погрешность малой.

3.2.3. Системы, заданные нелинейными дифференциальными уравнениями

Рассматриваемый случай является наиболее сложным для математического моделирования нелинейных систем и сводится к численному решению дифференциальных уравнений, описывающих звено.

Пусть звено описывается следующим векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dY}{dt} = G(t, Y), Y(t_0) = Y_0 \quad (3.40)$$

где $Y(t) = \{y_m(t)\}_{m=1}^M$ - вектор переменных состояния звена, $G(\cdot)$ - векторная функция, t_0 - начальный момент времени, который без потери общности можно положить равным нулю, Y_0 - начальное значение. К виду (3.40) можно привести любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вкратце методы численного решения уравнений вида (3.40).

Метод Эйлера. Этот метод является исторически первым из предложенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть T - период дискретизации. Тогда, заменяя производную по времени на ее аппроксимацию через конечную разность, получим следующее рекуррентное уравнение

$$Y[n+1] = Y[n] + TG(nT, Y[n]), n = 0, 1, \dots \quad (3.41)$$

которое позволяет шаг за шагом находить значения выходного процесса не линейной системы. На рис. 3.12 приведена геометрическая интерпретация получения данным методом приближенного решения уравнения (3.40) для случая $M = 1$. Начальной точкой решения является заданное по условию задачи значение y_0 . На основании y_0 в начальный момент времени $t_0 = 0$ вычисляют значение $G(0, y_0)$, которое равно тангенсу угла наклона касательной к истинной интегральной кривой (штрихпунктирная линия) уравнения (3.40) в точке $t_0 = 0$. Точка пересечения этой касательной с вертикальной прямой, восстановленной из точки $t = T$, дает значение $y_1 = y[1]$. Затем, определив y_1 ,

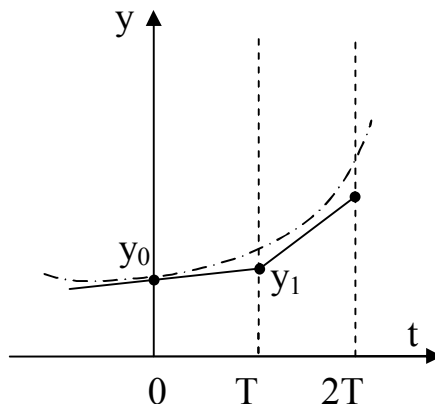


Рис. 3.12

из точки (T, y_1) проводят прямую с тангенсом угла наклона равным $G(T, y_1)$ до пересечения с вертикальной прямой, восстановленной из точки $t = 2T$. В результате вычисляют $y_2 = y[2]$. Повторяя эту процедуру, получают ломаную линию (*ломанную Эйлера*), которая является приближением к истинной интегральной кривой.

Понятно, что найденная линия в общем случае не будет совпадать с истинным решением. В теории дифференциальных уравнений показано, что ошибка полученного решения пропорциональна T^2 .

Модифицированный метод Эйлера. Рекуррентная процедура вычисления отсчета выходного процесса для данного метода имеет вид

$$Y[n+1] = Y[n] + \frac{T}{2} \{G(nT, Y[n]) + G((n+1)T, \tilde{Y}[n+1])\}, n = 0, 1, \dots \quad (3.42)$$

где $\tilde{Y}[n+1] = Y[n] + TG(nT, Y[n])$. Анализ (3.42) показывает, что тангенс угла наклона элемента ломанной Эйлера на текущем шаге определяется как среднее арифметическое тангенсов угла наклона ломанной Эйлера на текущем и следующем за ним шагах обыкновенного метода Эйлера. Такая процедура позволяет уменьшить ошибку вычислений и сделать ее пропорциональной T^3 .

Метод Рунге – Кутты. Данный метод является наиболее точным и используемым на практике среди одношаговых методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Правило вычисления значения очередного отсчета выходного процесса для метода Рунге – Кутты выглядит следующим образом

$$Y[n+1] = Y[n] + \frac{T}{6} \{K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3\}, n = 0, 1, \dots \quad (3.43)$$

где

$$\begin{aligned} K_0 &= G(nT, Y[n]) \\ K_1 &= G\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T, Y[n] + \frac{1}{2}K_0\right) \\ K_2 &= G\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T, Y[n] + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 &= G((n+1)T, Y[n] + K_2) \end{aligned}$$

Используя этот метод, оказывается возможно сделать ошибку вычислений пропорциональной T^5 .