

Частотные преобразования фильтров НЧ

Синтез БИХ фильтров может быть осуществлен не только путем использования методов инвариантности импульсной характеристики, билинейного преобразования или замены дифференциалов. Возможным способом может быть преобразование цифровых фильтров НЧ (для синтеза которых может быть использован любой из вышеперечисленных методов) в фильтр нужного типа (фильтр НЧ с другой полосой пропускания, фильтр ВЧ, полоснопропускающий или полоснозаграждающий), т.е. по схеме: Аналоговый ФНЧ → Цифровой ФНЧ → Цифровой фильтр нужного типа. Это достигается путем замены переменной z^{-1} в выражении для коэффициента передачи (КП) цифрового ФНЧ на функцию $G(Z^{-1})$, где Z - новая переменная, через которую будет записываться КП создаваемого фильтра. Функция $G(\cdot)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. она должна быть дробно-рациональной, поскольку только в этом случае КП синтезируемого фильтра будет также дробно-рациональной функцией;
2. $|G(e^{-iv})| = 1$, т.к. только в этом случае происходит отображение единичной окружности (линии частот) плоскости старой переменной z в единичную окружность (линию частот) плоскости новой переменной Z .
3. Внутренность единичного круга плоскости старой переменной z во внутренность единичного круга плоскости новой переменной Z , т.к. только в этом случае синтезируемый фильтр унаследует свойства устойчивости и реализуемости преобразуемого цифрового ФНЧ.

Наиболее простой вид функции $G(Z^{-1})$ имеет в случае

$$G(Z^{-1}) = \prod_{k=1}^K \frac{\alpha_k - Z^{-1}}{\alpha_k Z^{-1} - 1}, |\alpha_k| < 1, \quad (1)$$

где $\alpha_k, k = 1, \dots, K$ - действительные числа. Несложно показать, что k -ый сомножитель

$$G_k(Z^{-1}) = \frac{\alpha_k - Z^{-1}}{\alpha_k Z^{-1} - 1} \quad (2)$$

в (1) обладает всеми перечисленными свойствами, а, следовательно, и вся функция (1) этим условиям будет удовлетворять.

В таблице 1 приведен вид функции $G(Z^{-1})$ и формулы для расчета ее параметров (коэффициенты α и γ) для преобразования цифрового ФНЧ с частотой среза частотной характеристики Ω_c в цифровой фильтр требуемого типа с частотой среза частотной характеристики ν_c (ФНЧ или ФВЧ) или частотами полосы пропускания (заграждения) ν_1 и ν_2 (полоснопропускающий ППФ или полоснозаграждающий ПЗФ фильтры).

Таблица 1

Тип преобразования	$G(Z^{-1})$	α
ФНЧ → ФНЧ	$z^{-1} = \frac{\alpha - Z^{-1}}{\alpha Z^{-1} - 1}$	$\alpha = \frac{\sin[0,5(\Omega_c - \nu_c)]}{\sin[0,5(\Omega_c + \nu_c)]}$

ФНЧ → ФВЧ	$z^{-1} = -\frac{\alpha + Z^{-1}}{\alpha Z^{-1} + 1}$	$\alpha = -\frac{\cos[0,5(\Omega_c + \nu_c)]}{\cos[0,5(\Omega_c - \nu_c)]}$
ФНЧ → ППФ	$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + 1}$	$\alpha = -\frac{\cos[0,5(\nu_1 + \nu_2)]}{\cos[0,5(\nu_1 - \nu_2)]},$ $k = \text{ctg}[0,5(\nu_2 - \nu_1)]\text{tg}(0,5\Omega_c)$
ФНЧ → ПЗФ	$z^{-1} = \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + \frac{1-k}{k+1}}{\frac{1-k}{k+1}Z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}Z^{-1} + 1}$	$\alpha = \frac{\cos[0,5(\nu_1 + \nu_2)]}{\cos[0,5(\nu_1 - \nu_2)]},$ $k = \text{tg}[0,5(\nu_2 - \nu_1)]\text{tg}(0,5\Omega_c)$

Пример 1. Преобразование ФНЧ → ФНЧ. Допустим, что частота среза исходного ФНЧ равна Ω_c , и требуется, используя преобразование (см. Табл. 1)

$$z^{-1} = \frac{\alpha - Z^{-1}}{\alpha Z^{-1} - 1}, \quad (3)$$

синтезировать ФНЧ с частотой среза ν_c . Пусть $z = e^{i\Omega}$ и $Z = e^{i\nu}$. Тогда на основании (3) имеем

$$e^{-i\Omega} = \frac{\alpha - e^{-i\nu}}{\alpha e^{-i\nu} - 1} = \frac{e^{-i\nu} - 2\alpha + \alpha^2 e^{i\nu}}{1 - 2\alpha \cos \nu + \alpha^2}$$

Приравнявая в последнем равенстве действительные и мнимые части выражений, стоящих по разные стороны последнего знака равенства, получим

$$\cos \Omega = \frac{(1 + \alpha^2)\cos \nu - 2\alpha}{1 - 2\alpha \cos \nu + \alpha^2}, \quad \sin \Omega = \frac{(1 - \alpha^2)\sin \nu}{1 - 2\alpha \cos \nu + \alpha^2}$$

или

$$\text{tg } \Omega = \frac{(1 - \alpha^2)\sin \nu}{(1 + \alpha^2)\cos \nu - 2\alpha}.$$

Отсюда

$$\Omega = \text{arctg} \frac{(1 - \alpha^2)\sin \nu}{(1 + \alpha^2)\cos \nu - 2\alpha}. \quad (4)$$

При $\alpha = 0$ из (4) следует, что $\Omega = \nu$, и на плоскости $[\Omega, \nu]$ этой зависимости соответствует прямая, проходящая через начало координат под углом 45° к оси абсцисс (см. рис. 1 а). Несложно показать, что если $\alpha > 0$, то график зависимости (4) пройдет выше этой прямой, и наоборот, если $\alpha < 0$, то ниже (см. рис. 1 а). Поскольку все графики проходят через начало координат, то преобразования типа фильтра при замене (3) не происходит. Однако в зависимости от того, какой знак у параметра α , синтезируемый фильтр будет иметь либо меньшую полосу пропускания ($\nu_c < \Omega_c$ при $\alpha > 0$), либо большую полосу пропускания ($\nu_c > \Omega_c$ при $\alpha < 0$). При $\alpha = 0$ изменения полосы

пропускания не происходит, т.к. в этом случае мы имеем тождественное отображение $\Omega_c = \nu_c$.

Приравняв $\Omega = \Omega_c$ и $\nu = \nu_c$ в (4) и решая полученное уравнение относительно параметра α , получим выражение, стоящее в крайнем правом столбце соответствующей строки Таблицы 1.

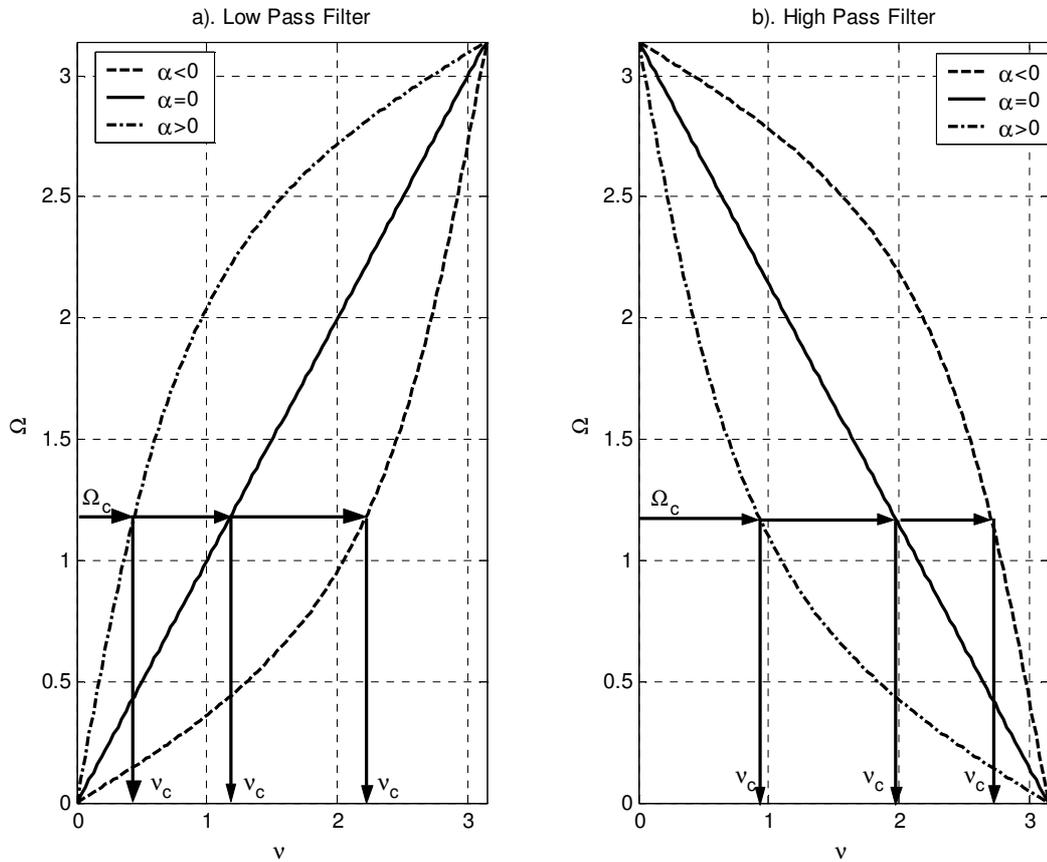


Рисунок 1

Пример 2. Преобразование ФНЧ \rightarrow ФВЧ. Допустим, что частота среза исходного ФНЧ равна Ω_c , и требуется, используя преобразование (см. Табл. 1)

$$z^{-1} = -\frac{\alpha + Z^{-1}}{\alpha Z^{-1} + 1}, \quad (5)$$

синтезировать ФВЧ с частотой среза ν_c . Пусть $z = e^{i\Omega}$ и $Z = e^{i\nu}$. Тогда на основании (5) имеем

$$e^{-i\Omega} = -\frac{\alpha + e^{-i\nu}}{\alpha e^{-i\nu} + 1} = -\frac{e^{-i\nu} + 2\alpha + \alpha^2 e^{i\nu}}{1 + 2\alpha \cos \nu + \alpha^2}$$

Приравняв в последнем равенстве действительные и мнимые части выражений, стоящих по разные стороны последнего знака равенства, получим

$$\cos \Omega = -\frac{(1 + \alpha^2) \cos \nu + 2\alpha}{1 + 2\alpha \cos \nu + \alpha^2}, \quad \sin \Omega = \frac{(1 - \alpha^2) \sin \nu}{1 - 2\alpha \cos \nu + \alpha^2}$$

или

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{(1-\alpha^2)\sin \nu}{(1+\alpha^2)\cos \nu + 2\alpha}.$$

Отсюда

$$\Omega = \pi - \operatorname{arctg} \frac{(1-\alpha^2)\sin \nu}{(1+\alpha^2)\cos \nu + 2\alpha}. \quad (6)$$

При $\alpha = 0$ из (6) следует, что $\Omega = \pi - \nu$, и на плоскости $[\Omega, \nu]$ этой зависимости соответствует прямая, проходящая через точки $(\pi, 0)$ и $(0, \pi)$ под углом 45° к оси абсцисс (см. рис. 1 б). Несложно показать, что если $\alpha > 0$, то график зависимости (4) пройдет ниже этой прямой, и наоборот, если $\alpha < 0$, то выше (см. рис. 1 б). Поскольку все графики проходят через точки $(\pi, 0)$ и $(0, \pi)$, то при замене (5) происходит преобразования типа фильтра ФНЧ \rightarrow ФВЧ. В зависимости от того, какой знак у параметра α , синтезируемый фильтр будет иметь либо большую полосу пропускания ($\nu_c < \Omega_c$ при $\alpha > 0$), либо меньшую полосу пропускания ($\nu_c > \Omega_c$ при $\alpha < 0$). При $\alpha = 0$ изменения ширины полосы пропускания не происходит, т.к. в этом случае мы имеем отображение $\Omega_c = \pi - \nu_c$.

Приравняв $\Omega = \Omega_c$ и $\nu = \nu_c$ в (6) и решая полученное уравнение относительно параметра α , получим выражение, стоящее в крайнем правом столбце соответствующей строки Таблицы 1.

Аналогичным образом происходят и преобразования ФНЧ \rightarrow ППФ и ФНЧ \rightarrow ПЗФ. Различие заключается лишь в том, что в этих случаях должны использоваться более сложные функции $G(Z^{-1})$ из Таблицы 1.

Автоматическое проектирование БИХ фильтров

В настоящее время в связи с широким применением компьютеров на практике часто применяется автоматический синтез БИХ фильтров, который не предполагает промежуточного синтеза аналогового фильтра-прототипа. При автоматическом синтезе за исходную частотную характеристику создаваемого фильтра принимается идеализированная частотная характеристика $H_s(e^{i\Omega})$, которую принято называть эталонной. В качестве такой характеристики можно, например, выбрать функцию равную единице в полосе пропускания и нулю в полосе заграждения

$$H_s(e^{i\Omega}) = \begin{cases} 1, & \Omega \in \text{полосе пропускания} \\ 0, & \Omega \notin \text{полосе пропускания} \end{cases}. \quad (7)$$

Частотная характеристика синтезируемого фильтра $H(e^{i\Omega})$ ищется в результате минимизации функции качества, которая зависит от разницы $|H(e^{i\Omega}) - H_s(e^{i\Omega})|$. Функция качества зависит от коэффициентов создаваемого фильтра $a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_M$ и может иметь следующий вид

$$Q(a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_M) = \max_{\Omega} \left\{ \left| H(e^{i\Omega}) - |H_d(e^{i\Omega})| \right|^2 w(\Omega) \right\} \quad (8a)$$

или

$$Q(a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_M) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| H(e^{i\Omega}) - |H_d(e^{i\Omega})| \right|^2 w(\Omega) \right) d\Omega, \quad (8b)$$

где $w(\Omega)$ - положительная весовая функция. Весовая функция $w(\Omega)$ необходима для того, чтобы придать определенным участкам оси частот разный вес в процессе решения задачи в соответствии с их значимостью для частотной характеристики синтезируемого фильтра. Коэффициенты фильтра $a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_M$ соответствуют минимуму функции качества, который ищется используя методы численного решения оптимизационной задачи в пространстве размерности $N + M + 2$.

Обычно коэффициент передачи проектируемого фильтра представляют в виде произведения K коэффициентов передачи цифровых фильтров второго порядка (такие фильтры более устойчивы к ошибкам представления коэффициентов, которые неизбежно возникают вследствие ограниченности разрядной сетки цифровых устройств, реализующих синтезируемый фильтр)

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \frac{1 + b_1^{(k)} z^{-1} + b_2^{(k)} z^{-2}}{1 + a_1^{(k)} z^{-1} + a_2^{(k)} z^{-2}}. \quad (9)$$

Таким образом, неизвестными при синтезе являются параметры $A, a_1^k, a_2^k, b_1^k, b_2^k$, $k = 1, \dots, K$, количество которых равно $4K + 1$. Процесс минимизации функции качества выполняется рекуррентно. При этом на каждом шаге коэффициент передачи $H(z)$ контролируют на реализуемость и устойчивость. Для этого по найденным на очередном шаге коэффициентам $A, a_1^k, a_2^k, b_1^k, b_2^k$, $k = 1, \dots, K$ вычисляют полюсы $H(z)$ и проверяют, находятся ли они в единичном круге. Если какой либо полюс z_{∞} не попадает в единичный круг, то этот полюс заменяют его зеркальным относительно единичной окружности

отражением $\bar{z}_\infty = 1/z_\infty^*$, как это показано на рис. 2.

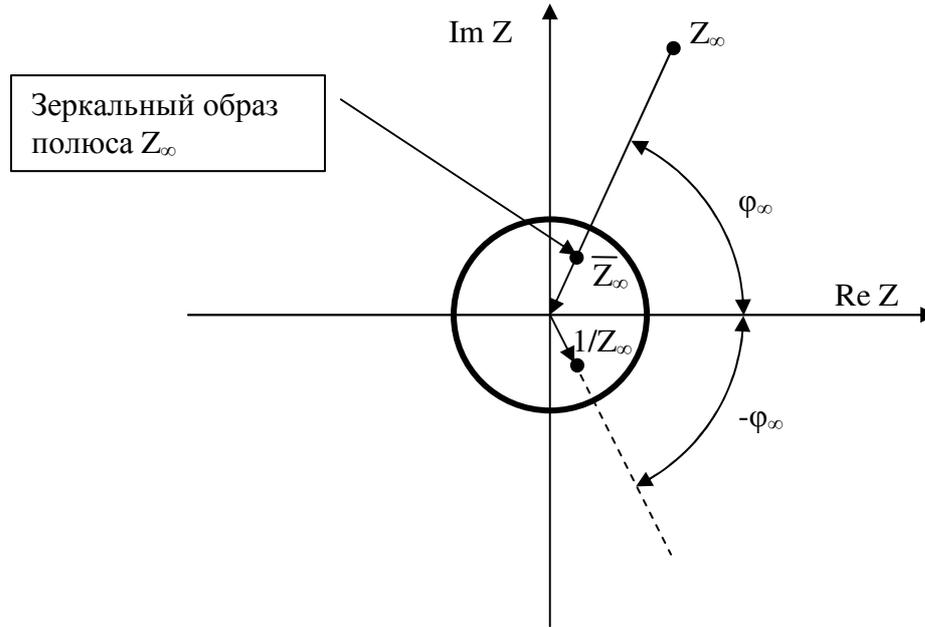


Рисунок 2

При такой замене не происходит изменения формы амплитудно-частотной характеристики. Поэтому после замены не нужно прерывать процесс нахождения минимума функции качества и он может быть продолжен. Докажем это.

Рассмотрим коэффициент передачи k -го цифрового фильтра второго порядка

$$H_k(z) = \frac{1 + b_1^{(k)} z^{-1} + b_2^{(k)} z^{-2}}{1 + a_1^{(k)} z^{-1} + a_2^{(k)} z^{-2}} = \frac{(z - z_0)(z - z_0^*)}{(z - z_\infty)(z - z_\infty^*)}, \quad (10)$$

полюс z_∞ которого на некотором шаге процесса оптимизации вышел за пределы единичного круга, т.е. $|z_\infty| > 1$. Сделаем в (10) замену $z_\infty \rightarrow \bar{z}_\infty = 1/z_\infty^*$. В итоге получим

$$\bar{H}_k(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_0^*)}{\left(z - \frac{1}{z_\infty^*}\right)\left(z - \frac{1}{z_\infty}\right)} = \frac{|z_\infty|^2}{z^2} \frac{(z - z_0)(z - z_0^*)}{(z^{-1} - z_\infty^*)(z^{-1} - z_\infty)} \quad (11)$$

Частотная характеристика фильтра с коэффициентом передачи (11) получается, как известно, при подстановке $z = e^{i\Omega}$

$$\bar{H}_k(e^{i\Omega}) = \frac{|z_\infty|^2}{e^{i2\Omega}} \frac{(e^{i\Omega} - z_0)(e^{i\Omega} - z_0^*)}{(e^{-i\Omega} - z_\infty^*)(e^{-i\Omega} - z_\infty)}. \quad (12)$$

Следовательно, $|\bar{H}_k(e^{i\Omega})| = |z_\infty|^2 |H_k(e^{i\Omega})|$, т.е. амплитудно-частотные характеристики фильтров с коэффициентами передачи $H_k(z)$ и $\bar{H}_k(z)$ отличаются только постоянным множителем и совпадают по форме. Это и требовалось доказать.

Если полученный в результате оптимизации фильтр не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к синтезируемому фильтру, процесс оптимизации повторяют, увеличив K - число фильтров второго порядка в представлении коэффициента передачи проектируемого фильтра (9).

МЕТОДЫ СИНТЕЗА КИХ ФИЛЬТРОВ

Элементарные свойства КИХ-фильтров

Свойство 1. КИХ-фильтр – линейная дискретная система, импульсная характеристика которой имеет конечную длительность (конечное число отличных от нуля отсчетов) N , т.е.

$$h[n] \begin{cases} \neq 0, & \text{при } 0 \leq n \leq N-1 \\ = 0, & \text{при } n < 0 \cup n > N \end{cases} \quad (13)$$

Число $N-1$ называется порядком фильтра. Коэффициент передачи такого фильтра равен

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + \dots + h[N-1]z^{-N+1}. \quad (14)$$

С другой стороны коэффициент передачи цифрового фильтра в общем случае может быть записан в виде

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{N-1}z^{-N+1}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{M-1}z^{-M+1}}. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), можно сделать два вывода: во-первых, коэффициенты, стоящие в числителе (15), равны отсчетам импульсной характеристики, т.е. $b_n = h[n]$, $n = 0, \dots, N-1$; во-вторых, все коэффициенты, стоящие в знаменателе (15), за исключением $a_0 = 1$, равны нулю ($a_m = 0$, $m = 1, \dots, M-1$). Последний вывод свидетельствует о том, что КИХ-фильтры не имеют полюсов, и, следовательно, для них вопросы устойчивости и реализуемости не актуальны: КИХ-фильтры всегда устойчивы и реализуемы. «Физически» это объясняется отсутствием в цифровом КИХ-фильтре внутренней обратной связи.

Свойство 2. Рассмотрим частотную характеристику КИХ-фильтра, которая в соответствии с (14) равна

$$H(e^{i\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-in\Omega}. \quad (16)$$

В последнем выражении частота Ω может принимать любые значения из интервала $[0, 2\pi]$. Допустим, что частотная характеристика вычисляется на множестве равномерно распределенных в этом интервале точек $\Omega_m = m\Delta\Omega$ ($0 \leq m \leq M-1$), где $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{M}$ - шаг по частоте, M ($M \geq N$) - количество членов в множестве. Тогда

$$H[m] = H(e^{i\Omega_m}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-i\frac{2\pi}{M}mn}, \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (17)$$

Выражение (17) в математике называется прямым дискретным преобразованием Фурье (ПДПФ). Несложно показать, что по ПДПФ $H[m]$ можно определить импульсную характеристику КИХ-фильтра, используя обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ)

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H[m] e^{i\frac{2\pi}{M}mn}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (18)$$

С другой стороны, коэффициент передачи КИХ-фильтра (14) определяется импульсной характеристикой $h[n]$, $n = 0, \dots, N-1$. Таким образом, подставляя (18) в (14) получим

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H[m] \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} e^{i\frac{2\pi}{M}mn} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H[m] \frac{1 - z^{-N} e^{i\frac{2\pi N}{M}m}}{1 - z^{-1} e^{i\frac{2\pi}{M}m}}, \quad (19)$$

т.е. коэффициент передачи КИХ-фильтра полностью определяется значениями частотной характеристики, вычисленной в M ($M \geq N$) равномерно распределенных в интервале $[0, 2\pi]$ точек.

Свойство 3. Пусть КИХ-фильтр имеет линейную фазовую характеристику

$$\beta(\Omega) = \beta_0 - \beta_1 \Omega, \quad (20)$$

где β_0, β_1 - постоянные коэффициенты. Установим, при каких условиях (20) возможно¹.

Известно, что фазовая характеристика цифрового фильтра с чисто действительной импульсной характеристикой является нечетной функцией, т.е.

$\beta(-\Omega) = -\beta(\Omega)$. Следовательно, на основании (20), имеем $\beta_0 + \beta_1 \Omega = -(\beta_0 - \beta_1 \Omega)$ или $\beta_0 = -\beta_0$, что возможно лишь при $\beta_0 = 0$.

С другой стороны, учитывая связь между частотной характеристикой фильтра и его импульсной характеристикой, получим следующую цепочку равенств

$$H(e^{i\Omega}) = |H(e^{i\Omega})| e^{i\beta(\Omega)} = |H(e^{i\Omega})| e^{i(\beta_0 - \beta_1 \Omega)} = |H(e^{i\Omega})| e^{-i\beta_1 \Omega} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-in\Omega}.$$

Следовательно,

$$|H(e^{i\Omega})| = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-i(n-\beta_1)\Omega}$$

Поскольку в левой части последнего равенства стоит чисто реальное число, получим

¹ Напомним, что БИХ-фильтры не могут иметь линейную фазо-частотную характеристику.

$$\sum_{n=0}^{N-1} h[n] \sin[(n - \beta_1)\Omega] = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) справедливо при любом значении частоты Ω , что возможно лишь при одновременном выполнении двух условий: во-первых, $\beta_1 = 0,5(N - 1)$; во-вторых, $h[n] = h[N - n - 1]$. Следовательно, для того чтобы КИХ-фильтр имел линейную фазовую характеристику (20) необходимо, чтобы его импульсная характеристика была симметрична относительно своей середины $\beta_1 = 0,5(N - 1)$, т.е. выглядела так, как показано на рис. 3. При этом фазовая частотная характеристика фильтра равна

$$\beta(\Omega) = -0,5(N - 1)\Omega. \quad (22)$$

При этом фазовая и групповая задержки фильтра постоянны, совпадают и равны

$$\tau_\phi = \tau_{gp} = 0,5(N - 1) \quad (23)$$

На основании (23) при четном порядке фильтра фазовая и групповая задержки фильтра равны целому количеству периодов дискретизации (рис. 3а), а при нечетном – целому плюс половина периода дискретизации (рис. 3б).

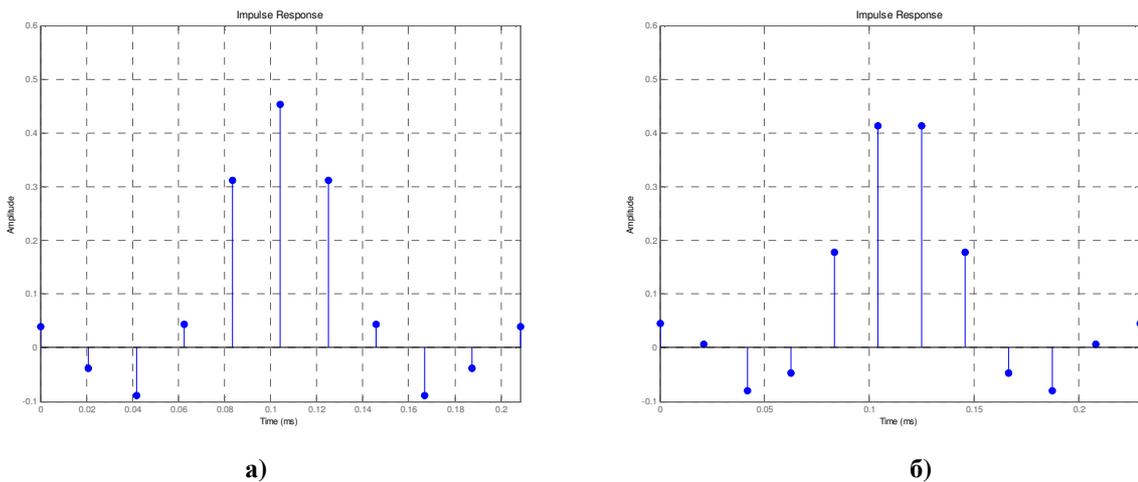


Рисунок 3

Свойство 4. Пусть КИХ-фильтр имеет фазовую характеристику

$$\beta(\Omega) = \beta_0 \text{sign}(\Omega) - \beta_1 \Omega, \quad (24)$$

где $\text{sign}(\Omega)$ - функция знака (функция принимает значения +1, 0 или -1 в зависимости от того положительна, равна нулю или отрицательна частота Ω), β_0, β_1 - постоянные коэффициенты. Осуществляя аналогичные использованным выше преобразования, можно показать, что КИХ-фильтр может иметь фазовую характеристику (24) только в том случае, когда выполняется следующее уравнение аналогичное (21),

$$\sum_{n=0}^{N-1} h[n] \sin[(n - \beta_1)\Omega + \beta_0 \text{sign}(\Omega)] = 0 \quad (25)$$

Уравнение (25) может быть выполнено, если: во-первых, $\beta_0 = 0,5\pi$; во-вторых, $\beta_1 = 0,5(N - 1)$; в-третьих, $h[n] = -h[N - n - 1]$.

Следовательно, для того чтобы КИХ-фильтр имел фазовую характеристику (24) необходимо, чтобы его импульсная характеристика была антисимметрична относительно своей середины $\beta_1 = 0,5(N - 1)$, т.е. выглядела так, как показано на рис. 4. При этом фазовая частотная характеристика фильтра равна

$$\beta(\Omega) = 0,5\pi \text{sign}(\Omega) - 0,5(N - 1)\Omega. \quad (26)$$

При этом групповая задержка фильтра постоянна и равна

$$\tau_{gp} = 0,5(N - 1). \quad (27)$$

На основании (27) при четном порядке фильтра групповая задержки фильтра равна целому количеству периодов дискретизации (рис. 4а), а при нечетном – целому плюс половина периода дискретизации (рис. 4б).

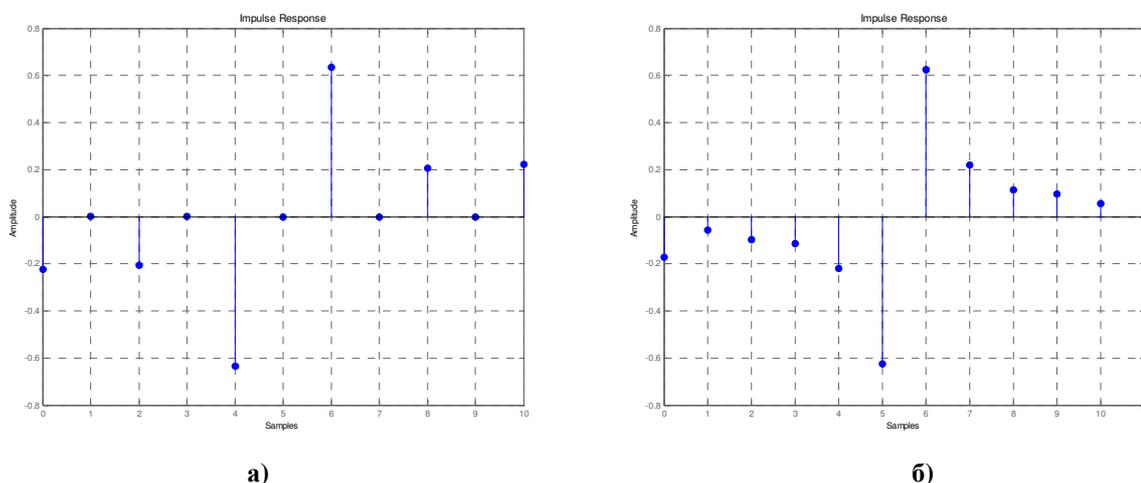


Рисунок 4

Метод весовых окон

Синтез КИХ-фильтров методом весовых окон производится следующим образом. Пусть $H_d(z)$ - коэффициент передачи БИХ фильтра с импульсной характеристикой $h_d[n]$, $n = 0, 1, \dots$. Положим импульсную характеристику КИХ фильтра равной

$$h[n] = w[n]h_d[n], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

где

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (29)$$

Дискретная функция $w[n]$ называется *прямоугольным окном*. На основании свойств дискретного преобразования Фурье амплитудно-частотная характеристика КИХ-фильтра равна свертке амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) БИХ-фильтра и АЧХ окна

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{i\nu}) W(e^{i(\Omega-\nu)}) d\nu \quad (30)$$

Несложно показать, что АЧХ прямоугольного окна равна

$$W(e^{i\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-in\Omega} = e^{-i\frac{N-1}{2}\Omega} \frac{\sin \frac{N\Omega}{2}}{\sin \frac{\Omega}{2}} \quad (31)$$

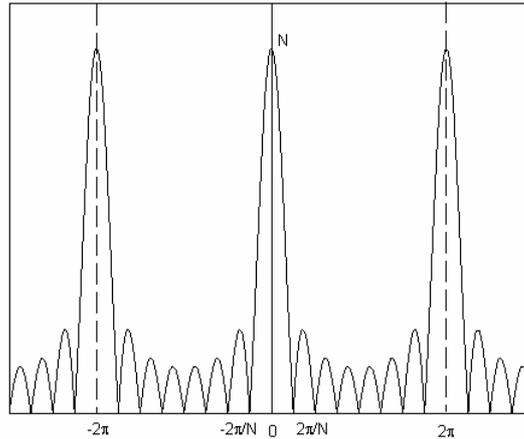


Рисунок 5

График модуля функции $W(e^{i\Omega})$ представлен на рис. 5. Эта функция имеет следующие особенности:

1. $|W(e^{i\Omega})|$ - периодическая функция с периодом 2π ;
2. График $|W(e^{i\Omega})|$ имеет вид периодически повторяющихся лепестков, максимальное значение которых равно N , а ширина по первым нулям - $4\pi/N$;
3. Между главными лепестками находятся боковые, ширина которых равна $2\pi/N$;
4. Максимальный уровень N имеет первый боковой лепесток, относительный уровень которого равен -13 дБ;
5. С увеличением N отношение площадей в главном лепестке и первом боковом остается постоянным.

Рассмотрим, к каким последствиям приводят названные свойства на примере синтеза фильтра нижних частот, АЧХ которого $H_d(e^{i\Omega})$ представлена на рис. ба. Результат свертки функции $H_d(e^{i\Omega})$ и $W(e^{i\Omega})$ представлен на рис. бб.

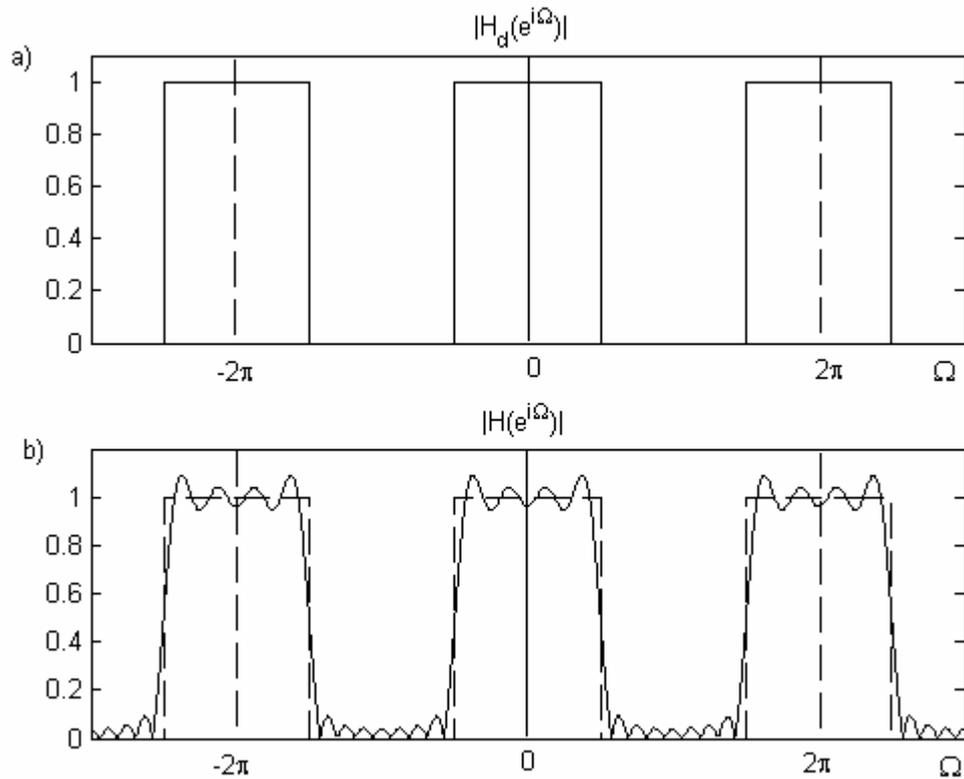


Рисунок 6

Из рисунка видно, что АЧХ КИХ-фильтра имеет пульсирующий характер, как в полосе пропускания, так и в полосе заграждения. Причем амплитуда пульсаций АЧХ возрастает по мере приближения к границе полосы пропускания. Другой особенностью АЧХ КИХ-фильтра является появление переходной области между полосами пропускания и заграждения, где АЧХ меняется сравнительно медленно. Анализ показывает, что при увеличении количества отсчетов N в импульсной характеристике КИХ-фильтра (ширины прямоугольного окна) крутизна АЧХ в переходной полосе увеличивается, Однако при этом уровень пульсаций АЧХ в полосах пропускания и заграждения практически остается постоянным, хотя частота самих пульсаций увеличивается. Это явление получило название *эффекта Гиббса*, названного так по имени математика, впервые исследовавшего вопросы сходимости рядов Фурье.

Для уменьшения эффекта Гиббса используют другие, отличные от прямоугольного, весовые окна, общим свойством которых является плавное уменьшение значения весовой функции к границам:

1. Окно Барлетта (треугольное окно)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (32)$$

2. Окно Хана

$$w[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (33)$$

3. Окно Хэмминга

$$w[n] = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (34)$$

4. Окно Блэкмана

$$w[n] = 0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n \leq N-1 \quad (35)$$

5. Окно Кайзера

$$w[n] = \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\alpha)}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (36)$$

где $I_0(\cdot)$ - функция Бесселя мнимого аргумента, α - постоянный коэффициент, $4 \leq \alpha \leq 9$.
Изменение α позволяет влиять на уровень боковых лепестков.

Значения уровня первого бокового лепестка и ширины главного лепестка по половинному уровню сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Окно	Амплитуда первого бокового лепестка, дБ	Ширина главного лепестка
Прямоугольное	- 13	$2\pi/N$
Барлетта	- 25	$4\pi/N$
Хана	- 31	$4\pi/N$
Хэмминга	- 41	$4\pi/N$
Блэкмана	- 57	$6\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 4$)	- 30	$4\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 6$)	- 45	$4\pi/N$
Кайзера ($\alpha = 9$)	- 67	$6\pi/N$

При использовании весовых окон при синтезе КИХ-фильтров необходимо учитывать, что одновременно с уменьшением уровня пульсаций АЧХ происходит расширение переходных полос (частотных областей между полосами пропускания и заграждения). Единственным средством против этого является увеличение порядка фильтра.

Метод частотной выборки

В соответствии со **Свойством 2** коэффициент передачи КИХ-фильтра определяется значениями частотной характеристики в M точках равномерно распределенных в интервале частот $[0, 2\pi]$

$$H(z) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H[m] \frac{1 - z^{-N} e^{i\frac{2\pi N}{M}m}}{1 - z^{-1} e^{i\frac{2\pi}{M}m}}$$

Поскольку частотная характеристика фильтра получается из коэффициента передачи фильтра подстановкой $z = e^{i\Omega}$, можно восстановить значение частотной характеристики в произвольной точке Ω по ее значениям $H[m] = H(e^{i\Omega_m})$ в точках $\Omega_m = \frac{2\pi}{M}m, m = 0, \dots, M-1$

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} H[m] \frac{1 - e^{-iN\Omega} e^{i\frac{2\pi N}{M}m}}{1 - e^{-i\Omega} e^{i\frac{2\pi}{M}m}}. \quad (37)$$

Суть метода частотной выборки заключается в том, что по выбранной заранее эталонной частотной характеристике $H_s(e^{i\Omega})$ определяются ее M значений. На основании (37) можно утверждать, что частотная характеристика синтезируемого фильтра обязательно пройдет через точки с координатами $[\Omega_m, H_s(e^{i\Omega_m})], m = 0, \dots, M-1$, которые называются узлами интерполяции. Однако между узлами интерполяции частотная характеристика фильтра может значительно отклоняться от эталонной, т.е. в полосах пропускания и заграждения могут возникнуть пульсации, уровень которых может быть недопустимо высок (см. рис. 7).

На рис. 7а приведена идеализированная частотная характеристика фильтра нижних частот, которая была выбрана в качестве эталонной. Кружками показаны значения эталонной характеристики, которые были выбраны в качестве узлов интерполяции. На рис. 7б показана АЧХ синтезируемого фильтра, построенная в соответствии с (37). Из рисунка следует, что реальная частотная характеристика действительно прошла через узлы интерполяции, однако пульсации в полосе пропускания и заграждения имеют недопустимо большой уровень.

Уровень пульсаций может быть снижен, если узлы интерполяции, приходящиеся на переходные полосы не фиксируют жестко, а предусматривают во процессе синтеза возможность их изменения. Изменяя уровень частотной характеристики в этих точках можно добиться приемлемого уровня пульсаций.

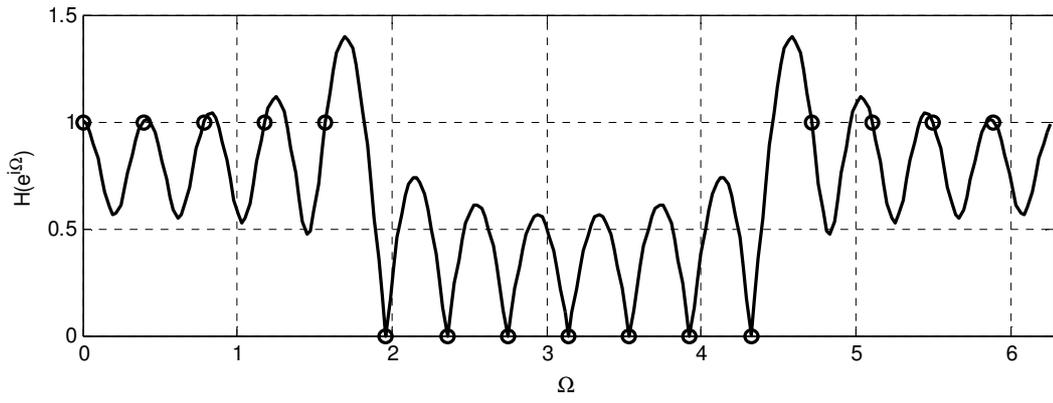
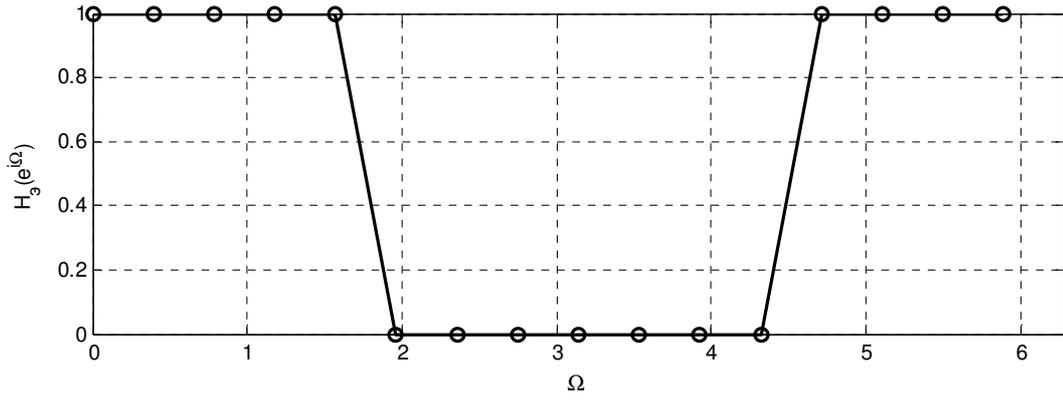


Рисунок 7