<u>Лабораторная работа № 2</u>

«Исследование линейных дискретных систем»

1. Общие теоретические положения

Рассмотрим систему цифровой обработки сигналов (СЦОС), выполняющую преобразование входного дискретного сигнала x[n] (воздействия) в выходной дискретный сигнал y[n] (реакцию):

где

$x[n] = x(nT)$ - воздействие,
$y[n] = y(nT)$ - реакция.

В общем случае связь реакции системы и воздействия описывается операторным уравнением:

$$y = F\{x\},$$

где F – некоторый оператор.

Системy обработки называют линейной, если она обладает свойствами **аддитивности** и **однородности**.

<u>Аддитивность.</u> Система называется аддитивной, если реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие:

$$F\{x_1 + x_2\} = F\{x_1\} + F\{x_2\}.$$

<u>Однородность.</u> Система называется однородной, если умножение воздействия на весовой коэффициент соответствует реакции, умноженной на тот же коэффициент:

$$F\{\alpha x\} = \alpha F\{x\}.$$

Систему называют **стационарной**, если она обладает свойствами инвариантности во времени:

$$y[n+l] = F\{x[n+l]\} \text{ для любого } l.$$

В соответствии с принципом стационарности задержка воздействия приводит к задержке реакции на то же время.

Мы будем рассматривать стационарные линейные дискретные системы (ЛДС). На практике такие системы называются цифровыми фильтрами.

Импульсная характеристика. Импульсной характеристикой (ИХ) $h[n]$ ЛДС называется её реакция на единичный импульс $U_0[n]$ при **нулевых начальных условиях**:

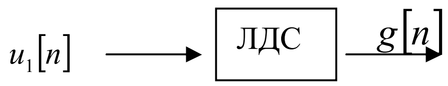
где $u_0[n] = \begin{cases} 1 & при\ n = 0 \\ 0 & при\ n \neq 0 \end{cases}$ - единичный цифровой импульс (цифровая дельта-функция).

Нулевые начальные условия означают отсутствие реакции при отсутствии воздействия, что отвечает принципу причинности, в соответствии с которым реакция не может возникнуть раньше воздействия:

$$\text{из } \{x[n] = 0 \text{ при } n < n_0\} \text{ следует, что } \{y[n] = 0 \text{ при } n < n_0\},$$

где n_0 - начальный момент (время возникновения воздействия).

Переходная характеристика. Переходной характеристикой (ПХ) $g[n]$ ЛДС называется её реакция на единичный цифровой скачок $u_1[n]$ при нулевых начальных условиях:



где $u_1[n] = \begin{cases} 0 & при\ n < 0 \\ 1 & при\ n \geq 0 \end{cases}$ - единичный цифровой скачок.

2. Описание ЛДС во временной области. Свертка

Формула свертки.

Рассмотрим реакцию ЛДС на произвольное воздействие $x[n]$:

$$y[n] = F\{x[n]\}$$

Поскольку любой дискретный сигнал_ $x[n]$ может быть представлен в виде свертки с единичным импульсом: $x[n] = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} u_0[n-m]x[m]$, мы получаем следующее выражение:

$$F\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0[n-m]x[m]\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\{u_0[n-m]x[m]\} =$$

по свойству однородности:

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] F\{u_0[n-m]\} =$$

по свойству стационарности и определению импульсной характеристики:

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] h[n-m] = x[n] * h[n],$$

где символом « * » обозначена операция **свертки** двух дискретных сигналов.

Таким образом, мы показали, что реакция ЛДС равна **свертке** воздействия и ИХ:

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

<u>Свертка.</u> Сверткой двух дискретных сигналов $x[n]$ и $y[n]$ называется величина $s[n]$, определяемая следующим образом:

$$s[n] = x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] y[n-m] =$$

делая замену переменной $l = n - m$ и меняя пределы суммирования, получим:

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[n-l] y[l].$$

Меняя переменную l на m, получим следующие эквивалентные выражения для свертки двух дискретных сигналов:

$$s[n] = x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] y[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-m] y[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m] x[n-m] = y[n] * x[n],$$

т.е. операция свертки является коммутативной ($x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$).

<u>Разностное уравнение.</u>

Соотношение между воздействием x и соответствующей реакцией y для линейной дискретной стационарной системы в общем случае имеет вид разностного уравнения:

$$y[n] = \sum_{l=0}^{N-1} b_l x[n-l] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k]$$

где a_n, b_i – коэффициенты уравнения, N, M – константы.

Порядком ЛДС называют величину $Q = \max\{(M-1), (N-1)\}$.

ЛДС называется рекурсивной, если хотя бы один из коэффициентов a_n разностного уравнения отличен от нуля.

Согласно разностному уравнению реакция рекурсивной ЛДС в любой момент времени определяется:

- текущим воздействием;
- предысторией воздействия;
- предысторией реакции.

Пример разностного уравнения (РУ) рекурсивной ЛДС:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{3} y[n-1].$$

Данное РУ описывает ЛДС первого порядка.

ЛДС называется нерекурсивной, если все коэффициенты a_k разностного уравнения равны нулю: $a_n = 0, \forall k > 0$. Таким образом, РУ нерекурсивной ЛДС имеет следующий вид:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[n-i]$$

Реакция нерекурсивной ЛДС в любой момент времени определяется:

- текущим значением воздействия;
- предысторией воздействия.

Пример нерекурсивной ЛДС второго порядка:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] - \frac{1}{3} x[n-2].$$

Вычислим импульсную характеристику (ИХ) *h[n]* для нерекурсивной ЛДС, пользуясь её разностным уравнением:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[n-i]$$

По определению ИХ имеем:

$$h[n] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i u_0[n-i]$$

Таким образом $h[n]\big|_{n=n_0} = b_0$, *для любого* $n_0 = \overline{0, N-1}$. ИХ нерекурсивного фильтра имеет конечную длительность. Такие ЛДС называют ЛДС с конечной импульсной характеристикой (КИХ системы). ИХ рекурсивной ЛДС имеет бесконечную длительность, поэтому такие ЛДС называются системами с бесконечной ИХ (БИХ системы).

Устойчивость ЛДС

ЛДС называется устойчивой, если при ограниченном воздействии и произвольных (конечных) начальных условиях реакция ЛДС также ограничена.

Теорема. Критерий устойчивости ЛДС

ЛДС является устойчивой, тогда и только тогда, когда ряд, составленный из значений ее ИХ сходится абсолютно: $\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

Следствия:

1. Нерекурсивные ЛДС являются устойчивыми.
2. ИХ устойчивой рекурсивной ЛДС имеет характер затухающей функции времени.

3. Описание ЛДС в Z области

Основной характеристикой ЛДС в Z области является её передаточная функция H(z), которая определяется как z изображение импульсной характеристики:

$$H(z) = Z\{h[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Связь реакции и воздействия ЛДС определяется как свертка ИХ и воздействия:

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Вычислив Z изображение от левой и правой частей уравнения, получим следующее выражение:

$$Z\{y[n]\} = Z\{h[n] * x[n]\}.$$

Пользуясь свойством z преобразования, получим:

$$Y(z) = Z\{h[n]\} * Z\{x[n]\} = H(z)X(z)$$

где $Y(z) = Z\{y[n]\}$, $X(z) = Z\{x[n]\}$.

Таким образом, передаточная функция $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$ есть отношение Z изображения реакции к Z изображению воздействия.

<u>Связь передаточной функции и разностного уравнения.</u>

Рассмотрим разностное уравнение в Z области, для чего вычислим Z изображение от его обеих частей:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[n-i] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[n-k],$$

пользуясь свойствами Z преобразования получим:

$$Y(z) = X(z)\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} - Y(z)\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}$$

Приводя подобные члены, получим связь передаточной функции (ПФ) с коэффициентами разностного уравнения:

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z),$$

откуда получаем:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

Таким образом, передаточная функция ЛДС является дробно-рациональной функцией, зависящей только от коэффициентов разностного уравнения и не зависящей от воздействия и реакции.

Как и любая дробно-рациональная функция ПФ однозначно определяется своими нулями и полюсами. Можно показать, что критерием устойчивости ЛДС в Z области является расположение всех полюсов ПФ внутри единичной окружности.

4. Описание ЛДС в частотной области

Передаточная функция (ПФ) суженная на единичную окружность называется частотной характеристикой ЛДС $H(i\Omega)$:

$$H(i\Omega) \equiv H(e^{i\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{i\Omega}} \quad \Omega \in (-\pi, \pi].$$

Используя выражение для передаточной функции ЛДС, получим следующее представление частотной характеристики (ЧХ):

$$H(i\Omega) \equiv H(e^{i\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{i\Omega}} = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]z^{-m}\Big|_{z=e^{i\Omega}} = \sum_{m=0}^{+\infty} h[m]e^{-im\Omega}.$$

Рассмотрим реакцию ЛДС на воздействие цифрового гармонического сигнала $x[n] = Ce^{in\Omega}$. В соответствии с формулой свертки, получим следующее выражение для реакции ЛДС:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^{+\infty} h[m]Ce^{i(n-m)\Omega} = Ce^{in\Omega}\sum_{m=0}^{+\infty} h[m]e^{-im\Omega} = x[n]H(i\Omega)$$

Таким образом, частотную характеристику можно представить как отношение реакции ЛДС к соответствующему гармоническому воздействию:

$$H(i\Omega) = \frac{y[n]}{x[n]}\bigg|_{x[n]=Ce^{in\Omega}}.$$

В экспоненциальной форме частотная характеристика (как комплексная функция) имеет следующее представление:

$$H(i\Omega) = A(\Omega)e^{i\varphi(\Omega)},$$

где $A(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$ - вещественные функции.

Модуль частотной характеристики называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ):

$$A(\Omega) = |H(i\Omega)|,$$

а фаза частотной характеристики называется фазово-частотной характеристикой (ФЧХ):

$$\varphi(\Omega) = \arg(H(i\Omega)).$$

Свойства частотной характеристики:

1. ЧХ, АЧХ, ФЧХ – непрерывные функции по частоте;
2. ЧХ, АЧХ, ФЧХ – периодические функции по частоте с периодом 2π;
3. Если коэффициенты ПФ вещественны, то АЧХ является четной, а ФЧХ – нечетной функцией по частоте.

Групповое время задержки $\tau(\Omega)$ ЛДС определяется скоростью изменения фазово-частотной характеристики и равно:

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega}.$$

Расчет частотной характеристики

По определению частотной характеристики и связи передаточной функции с разностным уравнением можем представить частотную характеристику ЛДС в следующем виде:

$$F(\Omega) = H\left(e^{i\Omega}\right) = \frac{\sum_{l=0}^{N-1} b_l e^{-l(i\Omega)}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-k(i\Omega)}} \equiv \frac{Ч\,(числитель)}{З\,(знаменатель)}$$

Откуда получаем выражения для амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик ЛДС:

$$A(\Omega) = \left|H\left(e^{i\Omega}\right)\right| = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}(ч)^2 + \mathrm{Im}(ч)^2}{\mathrm{Re}(з)^2 + \mathrm{Im}(з)^2}},$$

$$\varphi(\Omega) = \arg\left(H(e^{i\Omega})\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(ч)}{\mathrm{Re}(ч)}\right) - \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(з)}{\mathrm{Re}(з)}\right),$$

где введены следующие обозначения:
ч = числитель частотной характеристики,
з = знаменатель частотной характеристики.

Полученные выражения используются для аналитического представления АЧХ и ФЧХ ЛДС.

5. Условия отсутствия искажений на выходе ЛДС

Отсутствие искажений на выходе ЛДС означает, что сигнал может быть задержан на некоторое время n_0 и его амплитуда может быть изменена в N раз. Во временной области эти условия означают, что реакция системы на произвольное воздействие должна иметь следующий вид:

$$y[n] = Nx[n - n_0].$$

Рассмотрим условие отсутствия искажений в Z области, для чего вычислим Z преобразование от полученного выражения:

$$Z\{y[n]\} = Z\{Nx[n - n_0]\} = NZ\{x[n - n_0]\} = Nz^{-n_0} Z\{x[n]\}.$$

Таким образом, отсутствие искажений на выходе ЛДС с необходимостью приводит к следующему выражению для передаточной функции:

$$H(z) = Nz^{-n_0}.$$

Это означает, что частотная характеристика равна

$$H(i\Omega) = Ne^{-n_0\Omega}.$$

Соответственно, АЧХ и ФЧХ имеют следующие выражения:

$$A(\Omega) = N, \quad \varphi(\Omega) = -n_0\Omega\,,$$

т.е. АЧХ должна быть постоянна, а ФЧХ должна линейно убывать с частотой. Линейная зависимость ФЧХ от частоты приводит к постоянному значению группового времени задержки:

$$\tau(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{d(-n_0\Omega)}{d\Omega} = n_0\,.$$

При синтезе цифровых частотных фильтров, как правило, ставят следующие условия:

$$A(\Omega) = \begin{cases} N,\ \textit{при}\ \Omega \in (\Omega_{\min}, \Omega_{\max}) \\ 0,\ \textit{при}\ \Omega \notin (\Omega_{\min}, \Omega_{\max}) \end{cases},$$
$$\varphi(\Omega) = -n_0\Omega,$$

означающие передачу без искажений сигналов, сосредоточенных в полосе частот $(\Omega_{\min}, \Omega_{\max})$, и подавление сигналов, сосредоточенных вне этой полосы. Однако реализация поставленных условий (по крайней мере первого) возможна лишь приближенно, поскольку передаточные функции ЛДС являются дробно-рациональными.

6. Задание лабораторной работы

По заданному разностному уравнению ЛДС необходимо построить следующие характеристики:

1. Импульсную характеристику ИХ.
2. Переходную характеристику ПХ.
3. Аналитическое выражение передаточной функции ПФ.
4. Карту полюсов передаточной функции (исследовать устойчивость ЛДС).
5. Аналитическое выражение ЧХ.
6. Аналитическое выражение и график АЧХ.
7. Аналитическое выражение и график ФЧХ.
8. Групповое время задержки.

Варианты работы:

1. $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}y[n-1]$;
2. $y[n]=\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]$;
3. $y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n]-\frac{1}{2}y[n]$;
4. $y[n]=x[n]-\frac{1}{2}y[n]+y[n-1]$;
5. $y[n]=x[n-1]-\frac{1}{10}y[n-2]$;
6. $y[n]=\frac{1}{3}x[n]+\frac{1}{2}y[n]-y[n-1]$;
7. $y[n]=x[n]+2x[n-1]+3x[n-2]-\frac{1}{2}y[n-1]$;
8. $y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{3}y[n-2]$;
9. $y[n]=x[n-1]+\frac{1}{3}y[n-2]-\frac{1}{2}y[n-1]$;
10. $y[n]=\frac{1}{2}x[n]-2y[n]-\frac{1}{3}y[n-2]$
11. $y[n]=\frac{1}{3}x[n-1]-\frac{1}{2}y[n]-y[n-1]$;
12. $y[n]=x[n]-\frac{1}{5}y[n-1]-y[n-2]$;
13. $y[n]=\frac{1}{2}x[n]+3y[n]-\frac{1}{3}y[n-1]$;
14. $y[n]=x[n]-5x[n-1]+x[n-2]-\frac{1}{3}y[n-1]$;
15. $y[n]=x[n]+2x[n-2]-\frac{1}{2}y[n-1]$.

7. Пример программы для выполнения лабораторной работы в среде MathLab.

```
% Пусть РУ имеет вид
% y[n]=0.5*x[n]-0.1*x[n-1]-0.3*y[n-1]
% Т.о. коэф. РУ имеют следующие значения
% b0=0.5, b1=-0.1, a0=1, a1=0.3
% В среде MatLab коэф. a0 всегда должен быть указан явно (a0=1).
b=[0.5 -0.1];
a=[1 0.3];
N=10;%Количество отсчетов
n=0:N;
%1
%Единичный импулс u0
x=[1; zeros(N,1)];
%Расчет импульсной характеристики
y=filter(b, a, x);
figure(1);
plot(n,x,n,y)
hold on
stem(n,x)
stem(n,y)
grid
%2
%Единичный скачок u1
for k=0:N
    x(k+1)=1;
end;
%Расчет переходной характеристики
y=filter(b, a, x);
figure(2);
plot(n,x,n,y)
hold on
stem(n,x)
stem(n,y)
grid
%3
% Расчет ПФ должен быть сделан аналитически, в нашем примере:
%  H(z)=(0.5-0.1*z^(-1))/(1+0.3*z^(-1))
%4
% Карта нулей и полюсов (сделать вывод об устойчивости ЛДС)
figure(3);
zplane(b, a)
%5
% Расчет частотной характеристики
Fs=2*pi;
f=-pi/2:0.1:pi/2
H=freqz(b, a, f, Fs);
%6
% АЧХ
A=abs(H);
figure(4);
plot(f, A)
%7
% ФЧХ
Fi=angle(H);
figure(5);
plot(f, Fi)
%8
% ГВЗ
[GD, f]=grpdelay(b, a, 100, 2*pi);
figure(6);
plot(f, GD)
```